UNF Matematik Camp 2023

Faglige:

Kaare Veng Basse (hjælper)	kvb@unf.dk
Rasmus Hansen (hjælper)	rhh@unf.dk
Erik Søndergård Gimsing (co-ansvarlig)	esg@unf.dk
Jacob Bluhm Pedersen	jbp@unf.dk
Rasmus Frigaard Lemvig	rle@unf.dk
Mathias Weirsøe Klitgaard	mwk@unf.dk
Nanna Wiberg Nielsen	nwn@unf.dk
Bjørk Jackson Jakobsen	bjj@unf.dk
Marie Stuhr Kaltoft (ansvarlig)	mark@unf.dk

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening

Kompendium til UNF Matematik Camp 2023

Kompendiet er skrevet af Kaare Veng Basse (hjælper), Rasmus Hansen (hjælper), Erik Søndergård Gimsing (co-ansvarlig), Jacob Bluhm Pedersen, Rasmus Frigaard Lemvig, Mathias Weirsøe Klitgaard, Nanna Wiberg Nielsen, Bjørk Jackson Jakobsen og Marie Stuhr Kaltoft (ansvarlig).

Layout: Esben Skovhus Ditlefsen på forarbejde af Niels Jakob Søe Loft og Mick Althoff Kristensen.

Udarbejdelse af skabelon: Marie Stuhr Kaltoft.

Opsætning/TEXnisk ansvarlig: Marie Stuhr Kaltoft.

Indhold

Symbolliste

Faglig Introduktion

$\{\cdots\}$	Mængde.
$\emptyset$	Den tomme mængde.
$\subseteq$	Delmængde af.
$[a,b]$	Lukket interval fra a til b.
$]a,b[$	Åbent interval fra a til b.
$\in$	Element i.
$\notin$	Ikke element i.
$\mathbb{N}$	Naturlige tal.
$\mathbb{Z}$	Heltal.
$\mathbb{Q}$	Rationale tal.
$\mathbb{R}$	Reelle tal.
$\cup$	Foreningsmængde.
$\cap$	Fællesmængde.
$\setminus$	Differensmaengde.
U	Universalmængden.
$A^{\complement}$	Komplementærmængden af A.
$\mathcal{P}(A)$	Potensmængden af en mængde A.
$A \times B$	Det kartesiske produkt af A og B.
$f\colon A \to B$	Afbildning/funktion.
f^{-1}	Invers funktion.
$f(A)$	Billedet af f.

$f^{-1}(S)$	Urbilledet af S, hvor $f\colon A \to B$ og $S \subseteq B$.
$f(x)$	f anvendt på x.
$x \mapsto y$	x afbilledes over i y.
$\forall$	For alle.
$\exists$	Der eksisterer.
$\exists!$	Der eksisterer én.
$\neg$	Ikke.
$\Rightarrow$	Implikationspil.
$\Leftrightarrow$	Biimplikationspil.
$\lightning$	Modstrid.

Grafteori

G	Ofte anvendt bogstav for en graf.
u,v	Ofte anvendte bogstaver for knuder.
$n(G)$	Antal knuder i en graf G.
K_n	Komplet graf med n knuder.
C_n	Kredsgraf med $n \geq 3$ knuder.
P_n	Vejgraf med n knuder.
$\overline{G}$	Komplementet af en graf G.
$\omega(G)$	Kliketallet for en graf G.
$\alpha(G)$	Uafhængighedstallet for en graf G.
$\chi(G)$	Kromatisk tal for en graf G.
$\Delta(G)$	Maksimalvalensen af en graf G.
$d(u,v)$	Afstanden mellem knuderne u og v.

Anvendt Lineær Algebra

O	Nulmatricen.
I_n	$n \times n$-identitetsmatricen.

$\mathbb{R}^n$	Mængden af n-dimensionelle vektorer.
$\mathbb{R}^{m\times n}$	Mængden af $m \times n$-matricer.
A^{-1}	Den inverse matrix af A.
q_{ij}	Overgangsintensiteten fra tilstand i til tilstand j.
p_{ij}	Overgangssandsynligheden fra tilstand i til tilstand j.
$\exp(A)$	Eksponentialmatricen af A.
$\det(A)$	Determinanten af A.
F_n	Det n'te Fibonacci-tal.

Differens og Sumregning

$f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$	Talfølge.
$\sum$	Sumtegn.
$f(x)$	Følgeled.
Δ	Differensoperatoren.
$\Delta f(x)$	Forlæns differens.
$\Delta^n f(x)$	Den n'te differens.
$x^{\underline{n}}$	Faldende (faktorielle) potens.
$n!$	Fakultet.
$\binom{n}{k}$	Binomialkoefficient.
$\left[{n \atop k}\right]$	Stirlingtal af den første slags.
$\left\{{n \atop k}\right\}$	Stirlingtal af den anden slags.
$\sum f(x)\,\delta x$	Ubestemt sum.
$\sum_a^b f(x)\,\delta x$	Bestemt sum.

Matematisk Logik

p, q, r	Logiske variable.

α, β, γ	Logiske udsagn.
$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$	Konnektivsymboler.
$K_{\neg}$, $K_{\wedge}$, $K_{\vee}$, $K_{\rightarrow}$, $K_{\leftrightarrow}$	Konnektivfunktioner.
S, F, 1, 0	Sandhedsværdier.
$v\colon$ {logiske variable} $\rightarrow$ {1,0}	Sandhedsfunktion.
$\overline{v}\colon$ {logiske udsagn} $\rightarrow$ {1,0}	Udvidet sandhedsfunktion.
$\models$	Tautologisk konsekvens.
$\equiv$	Logisk ækvivalens.

0 Faglig Introduktion

Der er stor forskel mellem måden, hvorpå man lærer matematik i folkeskolen og gymnasiet, og måden, som man lærer matematik på universitet og senere. Hvorimod fokus før har været at se på matematik i form af ligninger, som skal løses, og talværdier, der skal bestemmes, så er den *rene* matematik meget mere generel og dybdegående. Formålet er at definere og stille spørgsmål til alt, hvad vi tager for givet, når vi arbejder med matematik, som vi kender det. Hvad betyder det at "løse en ligning"? Hvad vil det sige, at noget er en funktion? Og hvad er et "tal" overhovedet? Før vi takler emnerne i denne bog, giver det derfor god mening at introducere nogle grundlæggende begreber og noget af tankegangen, som vi benytter til at udføre matematiske beviser.

I dette kapitel vil der af og til komme nye matematiske tegn, som ikke nødvendigvis er gennemgået endnu, men bare rolig, dem vender vi tilbage til.

1 Mængder

En mængde er en samling af *elementer* eller "ting". For eksempel kan ingredienserne i røræg skrives op som mængden af bestanddele af røræg:

$$\{\text{Æg, Mælk}\}$$

Bemærk, at vi ikke kan udtale os om salt, da der findes forskellige præferencer for saltning af røræg.

Vi kan tydeligt se, at røræg ikke er det samme som spejlæg, eftersom deres ingredienser er forskellige:

$$\{\text{Æg, Mælk}\} \neq \{\text{Æg}\}$$

Selvom der er æg i begge mængder, så er mængderne ikke ens. Dog kan man sige, at ingredienserne til spejlæg er en *delmængde* af ingredienserne til røræg:

$$\{\text{Æg}\} \subseteq \{\text{Æg, Mælk}\}$$

Udover (meget vigtige) æggeopskrifter kan man også have mængder af mere “matematiske” elementer, som tal og andre mængder. Det kunne være mængder som

$$\{1,8,3\},\ \{\},\ \{6,\{2,-1\},5\},\ \text{eller}\ \{1,2,3,4,\dots\}.$$

De skrives alle ved at omgive kommaseparerede værdier med tuborgklammer, $\{\cdots\}$.

Den første mængde indeholder præcis elementerne 1, 8 og 3. Den anden mængde indeholder ingen elementer og kaldes *den tomme mængde*. Den optræder faktisk i matematik så ofte, at den har sit eget tegn, $\emptyset$. Det virker måske lidt underligt, men du er måske før blevet udsat for at skulle løse en andengradsligning. Den kan enten have 0, 1 eller 2 løsninger, og når man løser en andengradsligning, kan man sige, at man finder dens *løsningsmængde*. Hvis der er 0 løsninger, så er løsningsmængden $\emptyset$.

Den tredje mængde er lidt sjov, fordi den indeholder forskellige typer af elementer: 6 og 5 er tal, og $\{2,-1\}$ er en mængde. Derfor er 2 og -1 *ikke elementer i den tredje mængde!*

I den sidste mængde har du nok bemærket de tre prikker. Pas på de ikke stikker! De indikerer, at listen af tal (1,2,3,4) fortsætter uendeligt. Denne mængde er altså alle de positive heltal. Dem kalder vi også de *naturlige tal*, og denne mængde har *også* et symbol, $\mathbb{N}$.

En vigtig konvention (altså en standard måde at gøre tingene på) er, at hvert element kun optræder én gang i mængden. Det vil altså sige, at hvis en mængde indeholder 100 1-taller, er det det samme, som hvis den kun indeholdte ét!:

$$\{1{,}1{,}1{,}1{,}1{,}1{,}1{,}2{,}2{,}2\} \to \{1{,}2\}.$$

Ligeledes er rækkefølgen af elementer i en mængde også ligegyldig:

$$\{1{,}2{,}3\} = \{2{,}3{,}1\}.$$

Udover $\mathbb{N}$ har du måske også hørt om andre uendelige talmængder, som også har sine egne symboler. For eksempel

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z} &= \text{ mængden af alle heltal} = \{\ldots, -2, -1{,}0{,}1{,}2, \ldots\},\\
\mathbb{Q} &= \text{ mængden af alle brøker},\\
\mathbb{R} &= \text{ mængden af alle tal}.
\end{aligned}$$

Da vi matematikere er dovne, så gider vi ikke hele tiden at sige "mængden af". Derfor kalder vi i stedet $\mathbb{Z}$ for *heltallene*, $\mathbb{Q}$ for de *rationelle tal* og $\mathbb{R}$ for de *reelle tal.*

Hvor vi meget pænt kunne skrive de naturlige og hele tal som henholdsvis

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1{,}2{,}3{,}4, \ldots\} \quad \text{og}\\
\mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, -1{,}0{,}1{,}2 \ldots\},
\end{aligned}$$

så er det lidt sværere at forestille sig, hvordan man kunne gøre noget lignende for $\mathbb{Q}$, og især for $\mathbb{R}$. Vi kan dog prøve at starte med at liste nogle af brøkerne:

$$\left\{\ldots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$$

Men det er stadig uklart, hvordan talmønstret skal fortsætte ved "...". Vores mængde kunne for eksempel sagtens fortolkes som alle tallene på formen $\frac{1}{z}$, hvor z er et heltal forskelligt fra 0. Det er ikke særlig hensigtsmæssigt, at det kan fortolkes på flere måder, når vi meget specifikt mener $\mathbb{Q}$.

Vi kan gøre det meget mere klart, hvad vi præcis mener, ved brug af *mængdebyggernotation*[1]:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}. \tag{0.1}$$

Klap lige hesten brormand, det var ret meget ny notation, det der! Lad os starte med "$\{\ldots | \ldots\}$". Det man skriver på venstre side af den lodrette streg beskriver generelt elementerne i ens mængde, mens delen på højre side beskriver hvilke krav, elementerne skal opfylde. Elementerne i udtrykket til venstre skal altså opfylde de krav, vi sætter til højre. "$|$" læses altså som "hvorom der gælder".

Symbolet "$\in$" skal læses som "er et element i". Altså har vi, at Ligning (0.1) kan læses som "mængden af alle brøker $\frac{n}{m}$, hvorom der gælder, at n er et element i $\mathbb{Z}$, og hvor m er et element i $\mathbb{N}$".

Vi vælger specifikt, at m er et naturligt tal, for at undgå at dividere med 0. Dog beskriver Ligning (0.1) stadig hele mængden $\mathbb{Q}$.

Eksempel 1.1. Her er eksempler på nogle sande påstande.

$$\begin{aligned} 1 &\in \{1,3,6\}, \\ \frac{2}{5} &\in \mathbb{Q}, \\ \{3,7\} &\in \{4,\{3,7\},6\}, \\ 2.4 &\notin \{\{2.4\},\mathbb{Z},0\}, \\ -2 &\notin \mathbb{N}. \end{aligned}$$

○

[1]Faktisk kan $\mathbb{Q}$ skrives som én lang liste, men det kræver lidt snilde.

Eksempel 1.2. Nogle eksempler på mængdebyggernotation:

$$\begin{aligned}\{l \in \mathbb{N} \,|\, 1 < l \leq 3\} &= \{2{,}3\} \\ \{m \mid 2m \in \mathbb{N}\} &= \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\right\} \\ \{n \mid n \in \mathbb{R}, n \notin \mathbb{Q}\} &= \text{“mængden af alle irrationelle tal”}\end{aligned}$$

○

Mængdebyggernotation kan bruges til at definere åbne og lukkede intervaller af tal. Når man taler om grafer og talakser, kunne det for eksempel være relevant kun at kigge på et specifikt interval af værdier på den reelle tallinje, for eksempel alle reelle tal mellem 2 og 7. Det skriver vi normalt som [2,7], men vi kan faktisk også skrive det som

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 \leq x \leq 7\}.$$

Her indeholder vores mængde både 2 og 7. Derfor kalder vi den for et “lukket interval.” Hvis intervallet hverken indeholder 2 eller 7, kaldes det et “åbent interval”. Hvis intervallet inkluderer det ene, men ikke det andet endepunkt, så kaldes det et “halvåbent interval”. Herfra kan vi komme frem til en generel definition af intervaller.

Definition 1.3. Et *interval* på de reelle tal er en mængde givet ved to grænseværdier $a{,}b \in \mathbb{R}$. Hvis mængden indeholder a og b er intervallet *lukket* og ellers er det *åbent*.

Eksempel 1.4. Her er nogle eksempler på generelle intervaller skrevet med mængdebyggernotation:

$$\begin{aligned}[a{,}b] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\} \\ ]a{,}b[&= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\} \\ [a{,}\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < \infty\} \\ ]-\infty{,}b] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, -\infty < x \leq b\}\end{aligned}$$

$\circ$

Definition 1.5. Lad A og B være to mængder. Hvis alle elementer $a \in A$ også er elementer i B, siger vi, at A er en *delmængde* af B. Dette skriver vi som $A \subseteq B$.

Eksempel 1.6. Her er nogle eksempler på delmængderelationer:

$$\begin{aligned} \{1,2\} &\subseteq \{1,2,3,4\}, \\ \emptyset &\subseteq \{1,2,3,4\}, \\ \{1,2,3,4\} &\subseteq \{1,2,3,4\}, \\ \{1,2\} &\not\subseteq \{2,3,4\}, \\ [2,3] &\subseteq [1,5]. \end{aligned}$$

$\circ$

For mængder med endeligt mange elementer er det ret let at se, om en given mængde er en delmængde af en anden mængde. Vi kan bare tage et element af gangen fra den ene mængde og tjekke, at det også er i den anden mængde. Det er lidt sværere at se med uendelige mængder, som $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ eller intervallet [2,3]. Det giver dog logisk mening, at for eksempel [2,3] er en delmængde af [1,5], da alle tal mellem 2 og 3 kan findes mellem 1 og 5.

Sætning 1.7. Enhver mængde A er er en delmængde af sig selv. Med andre ord har vi, at for alle mængder A, så er $A \subseteq A$.

Sætning 1.8. Den tomme mængde $\emptyset$ er en delmængde af en hvilken som helst mængde. Med andre ord har vi, at for alle mængder A, så er $\emptyset \subseteq A$.

2 Mængdeoperationer

Vi har nu introduceret nogle generelle begreber om mængder, og hvordan vi kan relatere dem til hinanden. Men simple relationer og sammeligninger mellem mængder bliver hurtigt kedelige. Til sammenligning er påstanden $1 \neq 3$ ikke noget man behøver filosofere længe over, når vi taler om tal.

Til gengæld kunne det være meget mere underholdende at begynde at manipulere mængderne og lave dem til andre mængder. For eksempel kunne vi have lyst til at 'klistre' mængderne {1,2} og {3} sammen til {1,2,3}, hvilket jo minder dejligt meget om addition med tal. Men vi arbejder ikke med tal, men blot med samlinger af matematiske objekter, som vi ved et tilfælde har valgt at give symbolerne 1,2,3 . . . . De kunne lige så godt hedde $\wp$,$\daleth$,$\clubsuit$,θ, og så videre, hvilket jo er symboler, der ikke har nogen speciel betydning. Derfor kender vi heller ikke til definitionen af addition i mængdeverdenen, så det giver ikke mening at "addere" mængderne.

I stedet definerer vi såkaldte *mængdeoperationer*, der ændrer på mængder.

I resten af dette afsnit vil A og B være to vilkårlige mængder.

Definition 2.1. *Foreningsmængden* $A \cup B$ er mængden af alle elementer, som findes i enten A eller B.

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}$$

Definition 2.2. *Fællesmængden* $A \cap B$ er mængden af alle elementer, som findes i både A og B.

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\}$$

Definition 2.3. *Differensmængden* $A \setminus B$ er mængden af alle elementer i A, som ikke er i B.

$$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\}$$

Hvis dette virker lidt abstrakt, så kommer der her et par eksempler, hvor de forskellige definitioner er brugt.

Eksempel 2.4. Lad $A = \{\clubsuit 10,3,5,6,7\}$ og $B = \{3,\theta,5,\pi\}$. Da er

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{\clubsuit 10,3,\theta,5,6,7,\pi\}, \\ A \cap B &= \{3,5\}, \\ A \setminus B &= \{\clubsuit 10,6,7\}, \\ B \setminus A &= \{\theta,\pi\}. \end{aligned}$$

$\circ$

I alle anvendelser af mængdelære vil mængderne være betragtet i forhold til resten af anvendelsens "univers". Når vi for eksempel arbejder med reelle tal, kan vi have at gøre med en endelig mængde $\{r_0,r_1,\ldots,r_n\}$ eller en uendelige mængde $\{r_0,r_1,\ldots\}$, hvor $r_i \in \mathbb{R}$ for alle i. Under alle omstændigheder vil begge mængder være en delmængde af $\mathbb{R}$. Altså kan delmængder godt være uendelige.

Definition 2.5. *Universet* (også kaldet *universalmængden*) er den mængde, hvorfra vi hapser elementerne til de mængder, som vi arbejder med – se Venn-diagrammerne i Figur 0.1 senere i dette afsnit; her betegner U universalmængden for de forskellige mængder i diagrammerne.

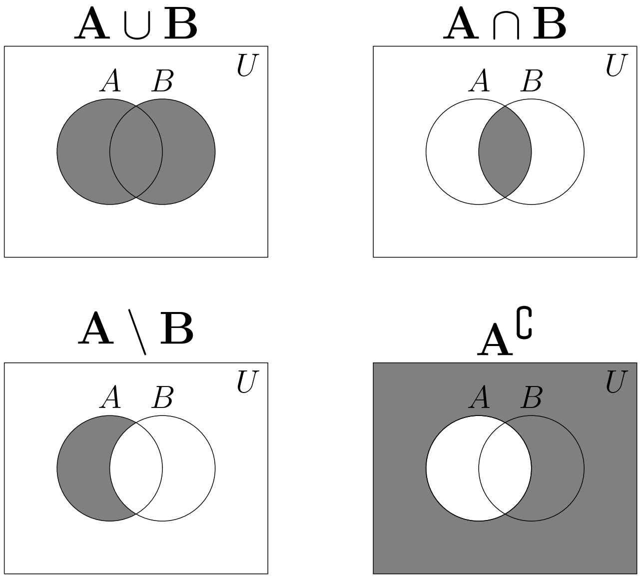
Mængden af reelle tal $\mathbb{R}$ kan altså forstås som *universet* af tal, vi typisk arbejder i, når vi arbejder med tal. *Universalmængden* betegner vi ofte U.

Definition 2.6. Lad A være en delmængde af U. Da er *komplementærmængden*, A^c, mængden af elementer i U, som ikke ligger i A, altså

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Eksempel 2.7. Lad K_s være mængden af mad, som Kaare spiser. Så er K_s^c den mad, som Kaare ikke spiser. I denne sammenhæng er universet al mad i verden. ∘

Vi har nu alle forudsætningerne til at kunne forstå Venn-diagrammer, der er en grafisk repræsentation af hvordan de hidtil definerede mængdeoperationer virker.



Figur 0.1: Eksempler med Venn-diagrammer

Nu hvor vi har set på Venn-diagrammer, skal vi se på en sjov størrelse – i hvert fald når det er små mængder, vi arbejder med. Når man snakker om mængder, har man nemlig også *potensmængden*, der i matematik skrives som $\mathcal{P}(A)$. Potensmængden er mængden af alle delmængder. For ordenligt at forstå hvad det betyder, tager vi lige et eksempel.

Eksempel 2.8. Lad mængden $A = \{1,2,3\}$. Da er potensmængden af A

$$\mathcal{P}(A) = \{\{\emptyset\},\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

$\circ$

Bemærk, at der er rimelig mange delmængder i A. Det skyldes, at man kan beregne antallet af delmængder i en mængde med formlen $2^{\#A}$, hvor $\#A$ er antallet af elementer i A. Ud fra denne formel ser vi dermed også, at størrelsen på potensmængden vokser eksponentielt med størrelsen på mængden.

Ofte vil vi gerne kunne sætte to mængder sammen, så vi kan have et element, som indeholder elementer fra flere forskellige mængder eller bare flere elementer fra den samme mængde. Til dette bruger vi det *kartesiske produkt*.

Definition 2.9. Lad A og B være mængder. Det *kartesiske produkt*, $A \times B$, er mængden af alle de forskellige mulige to-tupler (en fancy måde at sige koordinater) (a,b), hvor $a \in A$ og $b \in B$. Altså er $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Eksempel 2.10. Vi kender alle det gode gamle todimensionelle koordinatsystem med x- og y-aksen. Hvis vi skriver alle koordinater i dette koordinatsystem som en mængde, får vi, at $\{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $\circ$

Når vi har et kartesisk produkt mellem en mængde og sig selv, bruger vi potensnotation ligesom, når vi ganger et tal med sig selv.

Eksempel 2.11. Her er nogle eksempler på brug af notation med kartesiske produkter:

$$\begin{aligned}
\{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \\
\{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{Z}\} &= \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \\
\{(a,b,c) \mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}, c \in \mathbb{Q}\} &= \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^3
\end{aligned}$$

$\circ$

3 Påstande og beviser

Beviser spiller en central rolle i matematikken. Uden beviser ville vi ikke kunne vide, at de matematiske sætninger og formler, som vi bruger, overhovedet fungerer! Derfor er det enormt vigtigt for os at vide, hvordan man udfører et bevis.

For at lave et bevis skal man dog først have et udsagn, som man gerne vil bevise; ellers kommer man nok ikke særlig langt – hverken med beviset eller med sin karriere som matematiker. Men hvad er et udsagn egentlig?

En påstand eller et *logisk udsagn* er et udtryk, som kan *evalueres* til at være enten sandt eller falsk. Et udsagn har altså en *sandhedsværdi*. Nogle eksempler på udsagn er:

> Det regner.
>
> $2 + 2 = 5$.
>
> Barcelona er hovedstaden i Tyskland.
>
> Døren er låst.

Et udsagn er altså et udsagn, uanset om det er sandt eller falsk. Her kommer nogle eksempler på sætninger, som ikke er udsagn.

> Har du husket at ofre din daglige chokoladekiks til matematikguderne i dag?
>
> Giv mig din chokoladekiks.
>
> Chokoladekiks er den mest velsmagende kiks, der eksisterer.
>
> $1 + 6 = x$

Bemærk, at det tredje udtryk ikke er et logisk udsagn, da det er et holdningsspørgsmål. Det sidste udtryk er ikke et logisk udsagn, fordi udtrykkets *sandhedsværdi* afhænger af hvilken værdi, man giver x.

Beviser

For at vi kan vide, at noget i matematik er sandt, er vi nødt til at bevise det. Det er altså ikke nok bare at kaste dit udsagn op i luften og håbe, at ingen inden for høreafstand brokker sig. Derfor har vi[2] udviklet forskellige matematiske metoder til at bevise et udsagn. Vi kommer til at dække tre af de gængse bevistyper i dette afsnit: Direkte bevis, modstridsbevis og bevis ved induktion. Først bliver vi dog nødt til at introducere logiske slutninger.

Definition 3.1 (Slutning)**.** Lad p_1,p_2, . . . ,p_n og q være udsagn. Vi siger, at q kan *sluttes* fra p_1,p_2, . . . ,p_n, hvis q er sand, når alle udsagnene p_1,p_2, . . . ,p_n er sande. Altså når p_1,p_2, . . . ,p_n til sammen medfører q.

Et matematisk bevis er faktisk bare en slutning af et udsagn q fra nogle andre udsagn p_1,p_2, . . . ,p_n, hvor alle udsagnene p_1,p_2, . . . ,p_n er *aksiomer* (aksiomer er antagelser, som vi har lavet) eller tidligere beviste udsagn.

Definition 3.2. Et *aksiom* er et udsagn, som er så banalt, at matematikere ikke kan bevise dem, men må antage det som sandt. Et eksempel på et aksiom er “hvis $a = c$ og $b = c$, så er $a = b$”.

Eksempel 3.3. Lad p, q og r være tre udsagn. Hvis p medfører q, og q medfører r, så må p også medføre r. Mere formelt

[2] Ikke os faglige på Matematik Camp, men nogle kloge matematikere i tidernes morgen.

kan vi skrive, at

$$((p \Rightarrow q) \text{ og } (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r),$$

hvor *implikationspilene* betyder "medfører". Man kan også have en *biimplikationspil* $\Leftrightarrow$, som betyder, at to udsagn er ensbetydende ($\Leftrightarrow$ udtales "hvis og kun hvis").

Hvis det virker lidt abstrakt, kan du erstatte "medfører" med "spiser": Lad os sige, at en ørn spiser en mus, som har spist et stykke ost. Så har ørnen også spist osten. På samme måde virker det med at medføre.

Vi kan udvide det fra at det gælder for 3 udsagn, til at det gælder for en hvilken som helst mængde af udsagn. Hvis vi har en masse udsagn p_1,p_2, . . . ,p_n, hvor hvert udsagn medfører det næste, så medfører p_1 altså også p_n. ○

Definition 3.4. Et *direkte bevis* udnytter metoden vist i Eksempel 3.3 til at vise, at $p \Rightarrow q$, ved at vise, at

$$(\dots((p \Rightarrow p_1) \Rightarrow p_2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n) \Rightarrow q.$$

Eksempel 3.5. Vi beviser, at kvadratet af et lige tal er lige.

Bevis. Lad x være et lige tal. Med andre ord findes et heltal $n \in \mathbb{Z}$, så $x = 2n$. Da har vi, at

$$x^2 = (2n)^2 = 2^2n^2 = 2(2n^2)$$

Da $2n^2$ er et heltal, så må $2(2n^2)$ være et lige tal. Altså er x^2 altid lige, hvis x er lige. ■

I dette eksempel er p udsagnet "x er lige", og q udsagnet "x^2 er lige". Resten af beviset kan vi dele op, så

- p_1 er udsagnet "a er lige, hvis og kun hvis der findes $b \in \mathbb{Z}$, så $a = 2b$",
- p_2 er udsagnet "der findes $n \in \mathbb{Z}$, så $x = 2n$",

- p_3 er udsagnet "$x^2 = 2(2n^2)$",
- p_4 er udsagnet "$2n^2$ er et heltal",

og vi har, at

$$(((p \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_2)) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_3)) \Rightarrow p_4) \Rightarrow q.$$

Du har måske bemærket, at nogle af parenteserne er sat anderledes end i Definition 3.4. Egentlig burde $(p_1 \Rightarrow p_2)$ være et udsagn og $(p_1 \Rightarrow p_3)$ være et udsagn, men vi har valgt at skrive det op på denne måde for at udpensle, hvor vi har brugt antagelser, som ikke er eksplicit nævnt i beviset. Faktisk er p_1 et aksiom, som vi (uden at nævne) bruger til at konkludere både p_2 og p_3, hvorfor det ikke have givet mening at undlade de "ekstra" parenteser. $\circ$

Generelt vil vi ikke have modstrid i vores matematik – vi vil altså ikke sige, at en påstand er sand, hvis det i så fald medfører, at en anden påstand er både sand og falsk på samme tid (mere formelt vil vi ikke have, at hvis udsagn p er sandt, så er både udsagnet q og udsagnet "ikke-q" sande). Det kan vi udnytte til at lave *modstridsbeviser*.

Definition 3.6. Lad p være et udsagn, som vi gerne vil bevise, og lad "ikke-p" være "det modsatte" af p. Et *modstridsbevis* er en række slutninger, der medfører, at ikke-$p \Rightarrow$ (q og ikke-q), hvor q er et udsagn. Når vi har vist, at ikke-p medfører både q og ikke-q, så har vi opnået en modstrid. Et modstridsbevis afsluttes typisk med $\lightning$, som vi kalder en *modstridspil*.

Ofte vil den modstrid, som vi opnår, være meget tydelig – for eksempel, at $0 = 1$, som jo er i strid med aksiomet $0 \neq 1$.

Eksempel 3.7. Vi vil bevise, at $\sqrt{2}$ er irrationelt.

Bevis. Antag for modstrid, at $\sqrt{2}$ er rationelt. Altså, at $\sqrt{2}$ kan skrives som en uforkortelig brøk $\frac{p}{q}$. Da må

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2.$$

Dermed må $p^2 = 2 \cdot q^2$. Da er p^2 et lige tal, så må p også være et lige tal (kan du vise det? – Se Opgave 6.4). Da p er lige, må det kunne skrives på formen $2 \cdot m$, hvor m er et heltal, som er strengt mindre end p. Da har vi, at

$$2 \cdot q^2 = p^2 = (2 \cdot m)^2 = 4 \cdot m^2,$$

hvorfor $2 \cdot m^2 = q^2$. Da er q^2 et lige tal, og q er dermed også et lige tal. Derfor kan q skrives på formen $2 \cdot n$, hvor n er et heltal, som er strengt mindre end q. Men så deler 2 både p og q, så $\frac{p}{q}$ er ikke en uforkortelig brøk, hvilket er i modstrid med vores antagelse om, at $\frac{p}{q}$ var en uforkortelig brøk. Altså har vi opnået en modstrid $\lightning$. ■

◦

Definition 3.8 (Induktionsbevis)**.** Lad $p(n)$ være et udsagn, som indeholder variablen $n \in \mathbb{N}$ (for eksempel kunne $p(n)$ være udsagnet $n \leq n^2$). Et *induktionsbevis* er et bevis, hvor vi beviser noget ved at vise, at det gælder for $n = 1$ og, at hvis det gælder for et bestemt n, så gælder det også for det næste. Dette deler vi op i en slags "algoritme":

- *Induktionsstarten*, $n = 1$: Bevis, at udsagnet $p(1)$ er sandt (for at fortsætte eksemplet: $p(1)$ er udsagnet $1 \leq 1^2$).

- *Induktionstrinnet*: Bevis, at hvis $p(m)$ er sand (dette kalder vi *induktionsantagelsen*), så er $p(m+1)$ også sand (for eksempel hvis $p(m)$ er udsagnet $m \leq m^2$, så er $p(m+1)$ udsagnet $m+1 \leq (m+1)^2$).

Når både induktionsstarten og induktionstrinnet er bevist, så siger *induktionsprincippet*, at $p(n)$ er sand for alle $n \in \mathbb{N}$.

Altså, vi starter med et fundament i form af vores induktionsstart. Så viser vi, at hvis udsagnet gælder for et bestemt tilfælde, så gælder det også for det næste i rækken. På den måde viser vi, at vores starttilfælde og alle tilfælde derefter må være sande.

På mange måder minder det egentlig lidt om dominobrikker. Forestil dig en række dominobrækker. Så kan man med induktion vise, at hvis man vælter den første brik, så vælter alle brikkerne.

Induktionsstarten er, at hvis man skubber til den første dominobrik, så vælter den første dominobrik. Induktionsskridtet er så at vise, at hvis en brik vælter, så vælter den næste brik også.

Altså må alle brikkerne vælte, fordi vi vælter den første (induktionsstarten), og fordi den første brik er væltet vælter den anden brik også (induktionsskridtet), som så vælter den næste (induktionsskridtet) og så videre.

Eksempel 3.9. Vi vil bevise, at summen af de første n ulige tal er lig n^2.

Bevis. Vi fører beviset ved induktion.
Induktionsstart ($n = 1$): Summen af det første ulige tal er lig med 1^2. Det er sandt, da det første ulige tal er 1, og $1 = 1^2$.
Induktionsantagelse: Antag, at summen af de første n ulige tal er lig n^2.
Induktionsskridt: Bemærk, at det n'te ulige tal er $2n - 1$. Altså er $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$, så summen af de første $n+1$ ulige tal er $n^2+(2(n-1)+2) = n^2+(2n+1) = (n+1)^2$, hvilket var præcis det, vi skulle vise. ■

○

4 Kvantorer og Logisk Notation

Det er ofte hurtigt og nemt at bruge matematiske symboler til at konstruere sætninger, så man undgår at beskrive det med tekst, hvilket en dorligt stavende matematiker er glad for. Når man arbejder med lange udtryk, er det derfor ofte både nemmere og hurtigere at benytte sig af matematisk notation.

De første symboler, vi ser på, er, hvad vi i matematikken kalder for *kvantorer*. De bruges til at konstruere objekter og påstande, som vi vender tilbage til senere. Måden det sker på er gennem at angive *kvantiteten* af de pågældende variabler. Hvad der menes med dette er, om påstanden er "for alle x" eller der måske bare findes et par tilfælde.

Her har vi $\forall$, som betyder "for alle". Hvis det derimod ikke er for alle, men kun nogle af værdierne, kan man bruge "der eksisterer", der betegnes med $\exists$. Disse symboler kommer I til at se meget mere til senere. Dette kunne for eksempel være brugbart, hvis vi vil argumentere for, at der eksisterer et tal n med en eller anden særlig egenskab. Her kunne man blot skrive $\exists n$. Det er her vigtigt at bemærke, at det er lige meget *hvor mange* tal, mængder, funktioner og så videre, der eksisterer. Pointen med notationen er blot, at det matematiske objekt eksisterer.

I nogle tilfælde bliver det dog vigtigt at specificere unikheden af sådant et legeme. Det vil sige, der findes præcist ét - og ikke nul, to eller flere. Her bruges notationen "$\exists!$", som skal læses "der eksisterer netop én".

Kvantorer tillader os at angive langt mere abstrakte ting – og det kan bruges til at forkorte notation. Betragt for eksempel følgende påstand.

> Der eksisterer en doven matematiker.
>
> Skrevet med kvantorer ville dette være:
>
> $\exists$ en doven matematiker

Dette er tydeligvist sandt ud fra hvor få eksempler, der er.

Bemærkning 4.1. Hvis der er et udtryk, som bruger flere kvantorer (for eksempel $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$), så skal det læses fra venstre til højre. Altså skal du forestille dig, at du er blevet givet et vilkårligt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, og så skal du vise, at der findes et $y \in \mathbb{R}$, så produktet $x \cdot y$ er lig med 1.

5 Funktioner

I dette afsnit vil vi gennemgå det basale om funktioner samt definitionsmængden og værdimængden af disse. Vi vil også gennemgå nogle egenskaber, som funktioner kan have, herunder injektiv, surjektiv og bijektiv.

Definition 5.1. En *funktion* (også kaldet en *afbildning*) f er en sammenknytning af elementer i to mængder A og B, så *alle* $a \in A$ får tildelt ét element $f(a) \in B$. Dette bliver noteret på følgende måde: $f : A \to B$, som bliver udtalt: f er en funktion fra A til B.

Det skal her bemærkes, at hvert $a \in A$ skal give et og kun et $b \in B$. Hvis dette ikke er tilfældet, har man en funktion, hvor en x-værdi kan give mere end én y værdi, og hvis dette er tilfældet, er det ikke længere en funktion, da man så ikke ville kunne evaluere funktionen entydigt i et givent punkt.

Hvis ens postulerede funktion ikke opfylder kravene for en funktion, siger vi, at den ikke er *veldefineret* (dette er et matematisk fagord, der i denne sammenhæng betyder, at det du har beskrevet, ikke er funktion). Et eksempel på en ikke veldefineret funktion er $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = 1/x$, da der ikke knytter sig nogen værdi til 0. Et andet eksempel kunne være $f : A \to B$, som knytter et element $a \in A$ til to forskellige elementer b_1 og b_2 i B. Dette er ikke tilladt, da man kun må knytte én værdi til a, så $f(a)$ er entydig.

Definition 5.2. Lad $f : A \to B$ være en funktion. Mængden A kaldes for *definitionsmængden* for f, og mængden B kaldes for *værdimængden* for f.

Definition 5.3. Lad $f : A \to B$ være en funktion. Hvis $f(a) = b$, så siger vi, at a bliver afbildet i eller sendt over i b, samt at b bliver ramt af a. Mængden af de elementer $b \in B$, som bliver ramt af elementer fra A, kaldes for *billedet af f*. Dette bliver noteret som:

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(a) \in B \,|\, a \in A\} \\ &= \{b \in B \,|\, \text{Der findes et } a \in A \text{ således at } f(a) = b\} \\ &= \{b \in B \,|\, \exists a \in A : f(a) = b\} \end{aligned}$$

Man ville også kunne gå fra værdimængden til definitionsmængden ved hjælp af dens urbillede.

Definition 5.4. Lad A og B være mængder, lad $S \subseteq B$, og lad $f : A \to B$. Da er *urbilledet* af S under f

$$f^{-1}(S) = \{x \in A | f(x) \in S\}.$$

Bemærk, at urbilledet er en mængde – ikke en funktion. Det er altså mængden af elementer i definitionsmængden, som rammer S.

Eksempel 5.5. Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = x^2$. Da er $f^{-1}(\{4\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\} = \{-2,2\}$, og $f^{-1}([0;1]) = [-1;1]$, fordi $f([-1;1]) = [0;1]$ og for alle $x \notin [-1;1]$, så er $f(x) \notin [0;1]$. ○

Bemærkning 5.6. Hvis definitions- og værdimængden fremgår af sammenhængen, og der ikke er behov for at referere til funktionen ved navn, vil man ofte benytte notationen $x \mapsto y$. Dette læses som: funktionen, der sender x over i y. Her er x et element i definitionsmængden, og y er det element i værdimængden, der bliver ramt af x.

Definition 5.7. En funktion $f : A \to B$ kaldes *injektiv* (også kaldet en-til-en), hvis ethvert $b \in B$ bliver ramt af højst ét $a \in A$.

Bemærkning 5.8. Med andre ord, hvis $f(x) = f(y)$, så skal $x = y$.

Her skal I bemærke, at definitionen af en almen funktion og en injektiv én ikke er det samme. Forskellen ligger i, at en funktion gerne må sende både a og a' til samme b, selv hvis $a \neq a'$. Men for at opfylde injektivitet, er det kun *enten* a *eller* a', der må blive sendt til b. Nogle gange kalder man en injektiv funktion for en “en-til-en” funktion, da der er en-til-en sammenhæng mellem elementerne i A og elementerne i $f(A)$.

Eksempel 5.9 (Bevis for injektivitet)**.** Lad $f : A \to B$ være en funktion. Når man vil vise, at en afbildning f er injektiv, tager man udgangspunkt i en standard fremgangsmåde. Antag, at der findes a og a', så $f(a) = f(a')$. Hvis man ud fra antagelsen kan vise, at $a = a'$, så er funktionen injektiv. Hvis det ikke er sandt, at $a = a'$, men derimod, at $a \neq a'$, så er funktionen ikke injektiv. Lad os vise, at funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hvor $f(x) = 5x - 6$ for alle $x \in \mathbb{R}$, er injektiv. Antag, at $f(x) = f(y)$. Da er $5x - 6 = 5y - 6$. Ved at lægge 6 til på begge sider får vi, at $5x = 5y$. Til slut dividerer vi med 5 på begge sider og får, at $x = y$. Dette betyder, at f er injektiv. $\circ$

Eksempel 5.10. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = x + 1$ er injektiv. Du kan ud fra $f(x)$ bestemme x entydigt ved bare at trække 1 fra $f(x)$. $\circ$

Eksempel 5.11. Et eksempel på en *ikke-injektiv* funktion er $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = x^2$. For eksempel, hvis $f(x) = 4$, så kunne x både være 2 og -2. Derfor kan man ikke ud fra $f(x)$ entydigt bestemme x, så f er ikke injektiv. $\circ$

Definition 5.12. En funktion $f : A \to B$ kaldes *surjektiv*, hvis der for alle $b \in B$ findes et $a \in A$, så $f(a) = b$.

Bemærkning 5.13. Det vil sige, at en funktion er surjektiv, hvis $f(A) = B$.

Eksempel 5.14 (Bevis for surjektivitet)**.** Lad $f : A \to B$. Når man vil vise, at f er surjektiv, skal man vise, at der for ethvert $b \in B$ findes et $a \in A$, så $f(a) = b$. Lad os vise, at funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hvor $f(x) = 5x - 6$ for alle $x \in \mathbb{R}$, er surjektiv. Tag derfor et vilkårligt $y \in \mathbb{R}$. Lad $x = \frac{y}{5} + \frac{6}{5}$. Da er

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{y}{5} + \frac{6}{5}\right) \\ &= 5\left(\frac{y}{5} + \frac{6}{5}\right) - 6 = y + 6 - 6 = y. \end{aligned}$$

Her har vi valgt et "smart" x. Denne gode ide er fundet ved at løse ligningen $y = 5x - 6$ for y. Surjektiviteten vises så ved at indsætte det "smarte" x og vise, at det rammer det givne y. Den sidste del af metoden kan bruges uanset, hvordan man har fundet sit x. $\circ$

Eksempel 5.15. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = x^2$ er faktisk *ikke* surjektiv! Den sender for eksempel ikke noget tal over i -1. $\circ$

Definition 5.16. En funktion er *bijektiv*, hvis den både er surjektiv og injektiv.

Dette betyder, at når en funktion fra A til B er bijektiv, så vil der blive dannet et par mellem elementerne i de to mængder, således at ethvert element i B er parret med præcis ét element i A. Per definition af en funktion er hvert element x i A også i præcis ét par, (x,y). Når funktionen er bijektiv, gælder det samme altså for elementerne y i B. En bijektion mellem to mængder er en injektiv og surjektiv korrespondance mellem mængderne.

Eksempel 5.17. Funktionen $f(x) = 5x - 6$ er vist til både at være injektiv (Eksempel 5.9) og surjektiv (Eksempel 5.14), hvilket betyder, at den er vist til at være bijektiv. ○

Sætning 5.18. En funktion $f : A \to B$ er bijektiv, når der findes $g : B \to A$, så $f(g(b)) = b$ for alle $b \in B$, og $g(f(a)) = a$ for alle $a \in A$. I så fald kaldes g for en dobbeltsidet invers til f, og vi skriver, at $g = f^{-1}$.

Som man måske har lagt mærke til, minder notationen for invers funktion meget om notationen for urbilledet. Typisk kan man se forskel ved, at inversfunktionen er for et enkelt element, mens urbilledet er for en mængde. Dog er det ikke altid tilfældet, da $f^{-1}(B)$ også kan referere til værdimængden af f^{-1}.

Eksempel 5.19. I Eksempel 5.14 bestemte vi faktisk inversfunktionen til $f(x) = 5x - 6$. Den er $f^{-1}(y) = \frac{y+6}{5}$. ○

Funktioner af flere variable

Ofte vil man gerne have en funktion, som kan tage flere variable – for eksempel kunne man have lyst til at lave en funktion, som tager et 2D-koordinat ind og giver et enkelt reelt tal tilbage. Det kan vi sagtens! Vi bruger bare det kartesiske produkt, som vi så tidligere.

Eksempel 5.20. Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x,y) = x^2 + y^2$. Da f er en funktion fra planet (det todimensionelle koordinatsystem) til de reelle tal. $\circ$

Eksempel 5.21. Lad A, B og C være mængder og $f : A \times B \to C$ være en funktion. Da tager $f(a,b)$ et element fra A i første koordinat og et element fra B i andet koordinat og sender dette par over i et element i C. For eksempel kunne vi have mængderne $A = B = C = \{-1,1\}$. Lad $f : A \times B \to C$ være givet ved $f(a,b) = a \cdot b$. Altså har vi en funktion, som beskriver noget, som vi lærer i skolen – "minus gange minus giver plus, og plus gange minus giver minus". $\circ$

Eksempel 5.22. En funktion kan også sende elementer fra ét kartesisk produkt over til elementer i et andet kartesisk produkt. For eksempel har vi funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ givet ved $f(x,y) = (5x^2 + y,3y)$. $\circ$

6 Opgaver

- **Opgave 6.1:**
Fortæl en ven, hvad svaret til følgende spørgsmål er:
1) Hvad er en mængde?
2) Hvad er et udsagn?
3) Hvad er et bevis?
4) Hvad er en funktion?

- **Opgave 6.2:**
Bestem hvilke af følgende mængder er det samme som den tomme mængde.
1) $\{n \in \mathbb{Z} | n \leq 0\} \cap \mathbb{N}$.
2) $\{n \in \mathbb{Z} | n \geq 0\} \cap \mathbb{N}$.
3) Mængden af Fejl i denne delopgave.
4) $[0; 1] \cap [3; 8]$
5) $\emptyset \cap \emptyset$

- **Opgave 6.3:**
Fortæl en ven 3 logiske udsagn, du selv har fundet på.

•• **Opgave 6.4:**
Vis, at hvis kvadratet af et heltal x er lige, så er x også lige.

•• **Opgave 6.5:**
Oversæt følgende udsagn til alment sprog – ydermere, er udsagnene så sande?
1) $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$
2) $\forall x \in [3{,}7] : x < x^2$
3) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$
4) $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$
5) $\exists n{,}m \in \mathbb{N} : n \cdot m = 7$

6) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$

7) $\exists n \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{R} : n \cdot x = 0$

8) $\exists n \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{R} : n \cdot x = 1$

9) $\exists x \in \mathbb{Q} : \forall y \in \mathbb{Q} : x \cdot y = 1$

10) $\forall x \in \mathbb{Q} : \exists y \in \mathbb{Q} : x \cdot y = 1$

• **Opgave 6.6:**
Bestem hvilke af disse er logiske udsagn:

1) Kan du ikke lige give mig et lift?

2) Alle studerende på danske universiteter ejer en papegøje.

3) $2y + 5x = 30$.

4) Alt, der er gult, er spiseligt.

5) Køb en havetraktor nu, eller spring en tur over.

•• **Opgave 6.7:**
Afgør, om følgende udsagn er sande:

1) $7 \in \mathbb{N}$

2) $7 \in \mathbb{Z}$

3) $10 \in \mathbb{Z} \setminus \{10\}$

4) $\{10\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

5) $\emptyset \subseteq \emptyset$

• **Opgave 6.8:**
Vi konstaterede tidligere, at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hvor $f(x) = 1/x$, ikke er en veldefineret funktion. Hvilken definitionsmængde kan vi bruge i stedet, så f bliver veldefineret?

•• **Opgave 6.9:**
Bestem for hver funktion om de er injektive, surjektive eller bijektive.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = x^3$

2) $f : \mathbb{R} \to [0{,}\infty[$ givet ved $f(x) = x^2$

3) $f : \mathbb{N} \to [0{,}\infty[$ givet ved $f(x) = x^2$

4) $f :]-\infty{,}0] \to [0{,}\infty]$ givet ved $f(x) = x^2$

5) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = 5x + 1$

6) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = 5x + 1$

7) $f : \mathbb{R} \to \{\emptyset\}$ givet ved $f(x) = \emptyset$

●● **Opgave 6.10:**

Lad $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$ og $D = \{\emptyset\}$

1) Hvad er $A \cup B \cup D$?

2) Hvad er $A \cap B \cup D$?

3) Hvad er $B \cap D$?

4) Hvad er $A \cap B$?

5) D^C?

●● **Opgave 6.11:**

Afgør om følgende udsagn er sande:

1) Rasmus og Kaare er mega nice.

2) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

3) Der eksisterer naturlige tal x og y således at $-64 = 3x + 5y$.

4) Der eksisterer rationelle tal således at $x^2 + y^2 = 0$. Hvis ja hvilke? Hvis nej hvorfor?

5) Et lige tal ganget med et andet tal vil andet Heltal vil altid give et lige tal

6) $x * y$ er ulige hvis og kun hvis enten x eller y er lige

●● **Opgave 6.12:**

Lad $f(x) = 2^x$. Bestem en Definitionsmængde, så f bliver henholdsvis injektiv, surjektiv, bijektiv eller ingen af delene.

Opgave 6.13:
Brug Induktion til at bevise følgende:

1) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2) $2^n < 3^{n-1}$ for alle $n \geq 3$.

3) $2^n < n!$ for alle $n \geq 4$

Opgave 6.14:
Hvilke udsagn er ækvivalent med:
Der eksisterer ikke for alle x i $\mathbb{Z}$ hvoraf der eksistere y i $\mathbb{Z}$ hvoraf $x + y = 5$
I matematisk sprog:
$\neg(\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 5)$.

1) $\exists x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 5$.

2) $\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y \neq 5$.

3) $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = 5$.

4) $\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = 5$.

5) $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y \neq 5$.

6) $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y \neq 5$.

7) $\exists x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y \neq 5$.

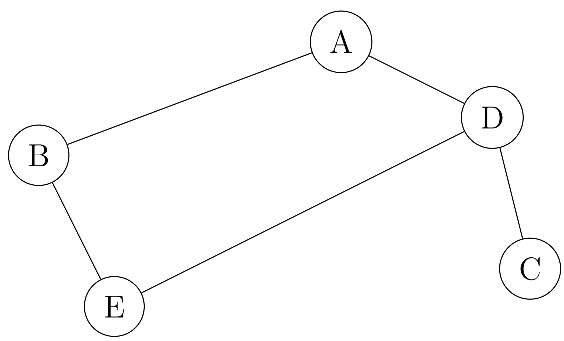
8) $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 5$.

1 Grafteori

1 Hvad er grafteori?

Grundlæggende begreber

Grafteori er studiet af grafer. Du tænker måske på grafer af funktioner i et koordinatsystem, men dette er en helt anden type graf. En graf i dette forløb er en samling af knuder og kanter, der forbinder knuderne med hinanden. Vi lader dette være en definition.



Figur 1.1: Eksempel på en graf

Definition 1.1. En graf $G = (V,E)$ er en samling af *knuder* V og *kanter* E, der går fra en knude til en anden (Helt formelt er E en delmængde af $\{\{v,u\} \mid v,u \in V\}$ og at $\{v,u\}$

ligger i E svare til at knuderne v og u er forbundet). Vi lader $n(G) = |V|$ betegne antallet af knuder i grafen.

Knuder tegner vi som cirkler eller firkanter, som kan have et navn (her blot bogstaver), mens kanterne er linjerne, der forbinder knuderne. Man kan tænke på grafer på flere måder. Forestil dig f.eks. et vejkort. Her er knuderne placeringer og kanterne veje. Man kan i det hele taget tænke på grafer som illustrationer af ting, der er relateret til hinanden. Grafteori har mange konkrete anvendelser, nok fordi man kan tænke på grafer på flere måder. Dette har nok også været motivationen for opfindelsen (eller opdagelsen?) af dette felt af matematikken. Grafteoriens grundlægger er en af de største matematikere nogensinde, Leonhard Euler. Han undersøgte et konkret problem angående broerne i Königsberg (i dag hedder byen Kaliningrad og ligger i Rusland), nemlig om det er muligt at gå over hver af de 7 broer over floden Pregel (nu kaldet Pregolya) præcist én gang. Lidt senere i forløbet får I lov til at gå i Eulers fodspor og løse dette problem.

I dette afsnit skal vi lære de mest grundlæggende begreber i grafteori, så vi er klar til at løse rigtige problemer i de senere afsnit. Der kan være en del begreber at huske, men heldigvis er de fleste af navnene ikke mystiske.

Definition 1.2. Vi har følgende definitioner:

1. En *løkke* er en kant, som starter og slutter i samme knude.

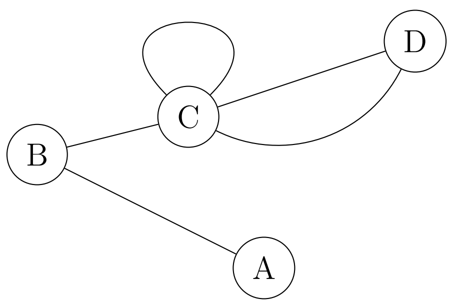
2. To forskellige knuder kaldes *naboknuder*, hvis der er en kant, der forbinder dem.

3. *Valensen* af en knude er lig antal kanter, der har endepunkt i knuden (en løkke lægger 2 til valensen). Den *totale valens* for en graf er summen af valensen for alle

knuder i grafen. En knude med lige valens kaldes for en *lige knude*, og tilsvarende kaldes en knude med ulige valens for en *ulige knude*. *Maksimalvalensen* for en graf er den højeste valens, der forekommer i grafen, og *minimalvalensen* er den mindste valens, der forekommer.

4. En *isoleret* knude er en knude, hvor ingen kanter har endepunkt. Med andre ord, en knude med valens 0.

Lad os illustrere disse begreber med et eksempel:



Figur 1.2: Illustration af begreberne i definition definition 1.2. A og B er et eksempel på to naboknuder. C har en løkke. E er en isoleret knude, idet denne knude ingen kanter har. Valensen af A er 1, for B er den 2. Valensen af C og D er henholdsvis 5 og 2. Bemærk, at E har valens 0, da det er en isoleret knude. Altså er maksimalvalensen 5, og minimalvalensen er 0.

Valens er et vigtigt begreb, som vi kommer til at bruge en del fremover. Vi har denne sætning om valensen i en graf:

Sætning 1.3. Den totale valens for en graf er lig antallet af kanter gange 2.

Bevis. Alle kanter i en graf starter og slutter i en knude (muligvis den samme knude). Altså må alle kanter bidrage med 2 til grafens totale valens. ■

Korollar 1.4. Den totale valens for en graf er et lige tal.

Bevis. Da den totale valens for en graf er lig 2 gange antallet af kanter, må 2 gå op i den totale valens. Altså er den totale valens lige. ■

Når vi arbejder med grafer, vil vi gerne kunne beskrive, hvordan forskellige knuder er relateret til hinanden i grafen. Derfor indfører vi nogle flere begreber:

Definition 1.5. Lad G være en graf med knuder A og B.

1. Der er en *rute* mellem A og B, hvis vi kan komme fra A til B ved at bevæge os langs nogle knuder og kanter i grafen. Følgen af knuder og kanter, vi bevæger os igennem, er selve ruten.

2. En *tur* fra A til B er en rute fra A til B, hvor man kun må gå langs hver kant én gang.

3. En *vej* fra A til B er en tur fra A til B, hvor man kun må passere hver knude én gang.

4. En rute kaldes *lukket*, hvis første og sidste knude på ruten er ens. Samme gælder for en lukket tur og en lukket vej. Hvis en rute, tur eller vej ikke er lukket, kaldes den *åben*.

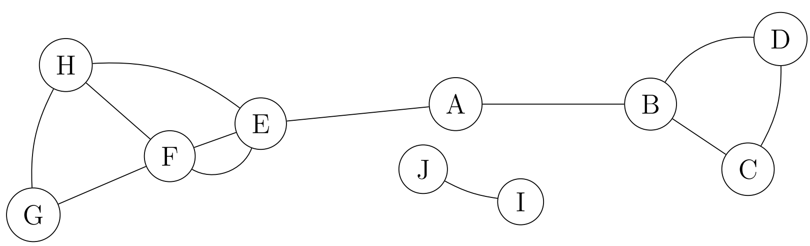
5. En *kreds* er en lukket tur, hvor de eneste gentagne knuder er start- og slutknuden.

For at gøre definitionerne lidt lettere at huske, har vi følgende tabel:

Tabel 1.1: Tabel til begreberne i definition definition 1.5

Begreb	Gentag kant	Gentag knude	Start=slut
Rute	Tilladt	Tilladt	Tilladt
Tur	Nej	Tilladt	Tilladt
Vej	Nej	Nej	Nej
Lukket rute	Tilladt	Tilladt	Ja
Lukket tur	Nej	Tilladt	Ja
Kreds	Nej	Første og sidste	Ja

Ser vi på figur 1.2, kan vi se, at der er ruter mellem alle knuder undtagen E. Der findes også nogle lukkede ture. F.eks. kan vi gå fra D til C langs én af kanterne og tilbage til D gennem den anden kant. Denne tur er også en kreds. Kan du finde andre lukkede ture? Andre kredse? En anden illustration af begreberne ses i grafen herunder:



Figur 1.3: En graf med mange slags ruter.

I denne graf er der mange ruter! Dog er der ikke ruter mellem alle knuder, f.eks. findes ingen rute mellem I og A. Vi kan ligeledes finde mange ture, også lukkede af slagsen. F.eks. kan vi gå fra B til C til D og tilbage til B. Dette er også en kreds. Kan vi finde en lukket tur, som ikke er en kreds? Ja, lad os starte i F og gå til G, til H, tilbage til F, til E og tilbage til F langs den anden kant. Dette er en lukket tur, da ingen kanter bliver brugt mere end én gang, og vi både starter og slutter i F. Men vi passerer F undervejs i turen, så F optræder ikke kun som start- og slutknude. Derfor er denne lukkede tur ikke en kreds.

Se igen på figur 1.3. Der er noget særligt ved knuderne I og J i forhold til de andre knuder i grafen. I og J kan forbindes med en rute, men de kan ikke forbindes med ruter til nogle andre knuder i grafen. På samme måde kan knuderne fra A til H forbindes med ruter indbyrdes. Disse overvejelser giver os ideen til en ny definition:

Definition 1.6. En graf kaldes *sammenhængende*, hvis det for alle par af knuder i grafen gælder, at disse kan forbindes med en rute.

Graferne i figur 1.2 og figur 1.3 er ikke sammenhængende. Det er grafen på figur 1.1 til gengæld. Vi kommer primært til at arbejde med sammenhængende grafer.

Definition 1.7. Hvis A er en knude i en graf G, så består *sammenhængskomponenten*, som indeholder A, af alle de knuder, som er forbundet til A via en rute, samt alle kanterne mellem disse knuder.

Graferne i figur 1.2 og figur 1.3 består hver især af to sammenhængskomponenter. Grafen i figur 1.1 har kun én sammenhængskomponent.

Nogle graftyper

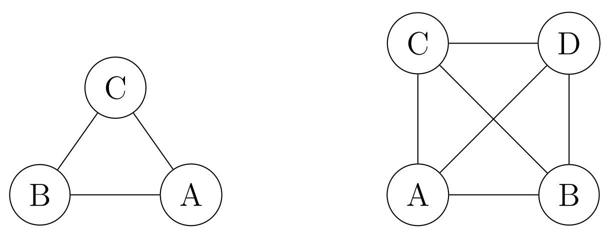
Vi vil nu komme ind på nogle bestemte typer grafer, som er gode at kende.

Definition 1.8. En *simpel graf* er en graf uden løkker, og hvor ingen naboknuder er forbundet af mere end én kant.

Grafen i figur 1.1 er et eksempel på en simpel graf, mens grafen i figur 1.2 ikke er en simpel graf. F.eks. har knude C en løkke. Man kan tænke på simple grafer som grafer uden "overflødige kanter", altså der er netop det antal kanter i grafen, som skal bruges, for at de samme knuder er forbundet. Vi ser nu på en speciel type af simple grafer.

Definition 1.9. En *komplet graf* er en simpel graf, hvori alle par af forskellige knuder er forbundet med hinanden. Den komplette graf med n knuder betegner vi som K_n.

Lad os se på de to komplette grafer K_3 og K_4 som eksempel:

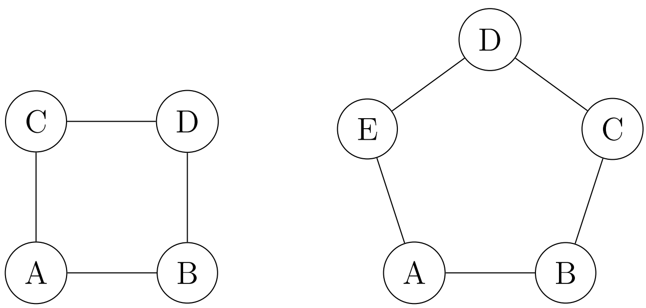


Figur 1.4: Graferne K_3 og K_4.

Den sidste type graf, vi vil kigge på her, er kredsgrafer. Definitionen er meget, som navnet antyder.

Definition 1.10. En *kredsgraf* er en simpel graf, hvor alle knuderne indgår i netop én kreds. Kredsgrafen med $n \geq 3$ knuder betegner vi som C_n (C'et står for "cycle", som betyder "kreds" på engelsk).

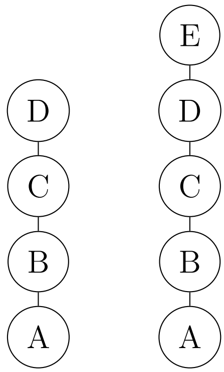
Hvorfor skal vi have $n \geq 3$? Hvis n f.eks. er 2, kan vi slet ikke lave en kreds uden at skulle tegne flere kanter mellem de to knuder. Men så kan grafen ikke være simpel! Ligeledes går det også galt i tilfældet $n = 1$. Definitionen giver altså kun mening, hvis $n \geq 3$. Lad os se på et eksempel, nemlig graferne C_4 og C_5:



Figur 1.5: Graferne C_4 og C_5.

Definition 1.11. En *vejgraf* er en simpel graf, hvor én vej kan gennemløbe alle knuder og kanter i grafen. Vejgrafen med n knuder betegner vi P_n (P'et står for "path", som er det engelske ord for "vej").

Nedenfor ser vi to eksempler på vejgrafer.

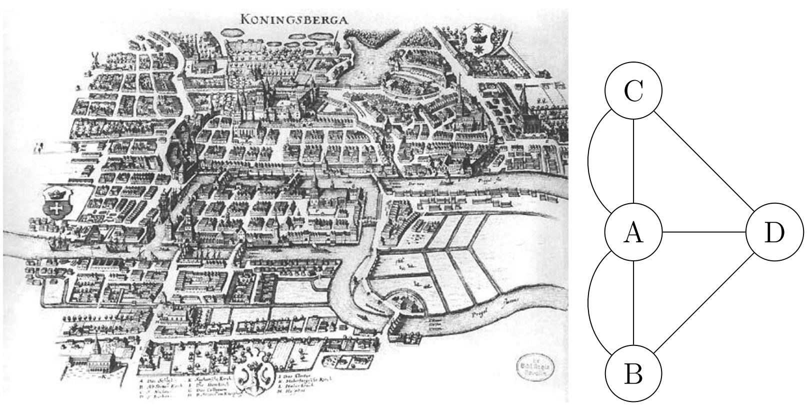


Figur 1.6: Graferne P_4 og P_5.

Vi kan afslutte med at bemærke, at komplette grafer, kredsgrafer og vejgrafer (de tre standardgrafer) altid er sammenhængende. Vi er nu parate til at kaste os ud i at løse nogle interessante problemer med grafteori.

Historien om Königsberg

I 1736 blev Leonhard Euler bedt om at finde en rute gennem byen Königsberg, så en procession (et optog) kunne gå over samtlige syv broer i byen præcis én gang (som I måske husker fra tidligere, er det definitionen af en "tur"). Året efter udgav han en artikel, som analyserede, hvorvidt dette var muligt. Denne artikel betragtes som det første bidrag til grateorien [1]. Nedenfor på figur 1.7 ses et billede af Königsbergs broer, og hvordan disse kan repræsenteres ved en graf.



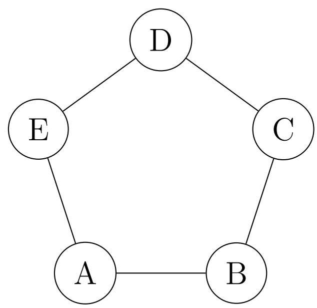
Figur 1.7: *Øverst*: Tegning af Königsberg med broerne. *Nederst*: Königsberg repræsenteret ved en graf. Knuderne er de fire landområder, og kanterne er broerne imellem dem. [2]

Efter dette store bidrag til grafteorien har Euler naturligvis fået opkaldt et begreb efter sig:

Definition 1.12. En *Euler-tur* er en tur, som indeholder alle grafens kanter.
En Euler-tur kan enten være åben eller lukket. Her genbruger vi blot definition definition 1.5-(4):

- En lukket Euler-tur starter og slutter i samme knude.
- En åben Euler-tur starter og slutter i to forskellige knuder.

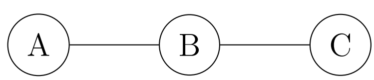
Eksempel 1.13. For et helt simpelt eksempel på en lukket Euler-tur kan vi se på kredsgrafen med 5 knuder igen:



For at lave en lukket Euler-tur kan vi vælge en vilkårlig knude at starte i. For eksempel kan vi starte i A. Vi kan nu gå turen $A \to B \to C \to D \to E \to A$. Da alle kanterne er med i turen netop én gang og vi har samme start- og slutknude, har vi altså lavet en lukket Euler-tur i grafen!

Overvej: Gælder det for alle kredsgrafer? ∘

Eksempel 1.14. For et tilsvarende eksempel på en åben Euler-tur kan vi se på vejgrafen med 3 knuder P_3:



For at lave en åben Euler-tur skal vi vælge en knude at starte i med en smule omtanke. Vi skal nemlig starte og ende i en af endeknuderne for, at vi kan få alle kanter og knuder med. For eksempel kan vi starte i A. Vi kan nu gå turen $A \to B \to C$. Da alle kanterne er med i turen netop én gang, og vi har forskellige start- og slutknuder, har vi altså lavet en åben Euler-tur i grafen! ○

Som I måske har bemærket, kan det blive svært at forudsige, om en graf har en Euler-tur, når den har mange knuder og kanter. Faktisk er der et relativt simpelt trick, som kan afgøre om en graf har en Euler-tur!

Sætning 1.15. Betragt en graf G uden isolerede knuder.

1. G har en lukket Euler-tur, hvis og kun hvis den er sammenhængende og alle knuder har lige valens.

2. G har en åben Euler-tur, hvis og kun hvis den er sammenhængende og har præcist to knuder med ulige valens.

Bevis. For at bevise påstand 1, skal vi vise to ting. Første skal vi vise, at hvis G har en lukket Euler-tur, er G sammenhængende, og alle knuder har lige valens. Dette overlades som en øvelse, se opgaverne.

Dernæst skal vi vise, at hvis en graf G er sammenhængende, og alle knuder har lige valens, vil G have en lukket Euler-tur. For at finde denne lukket Euler-tur bruger vi følgende procedure: Vælge en start knude v og gør følgende iterativt

- Vælg en kant og kryds den, den er nu tilføjet til vores Euler-tur.

- Slet den krydsede kant, og hvis det gør knuden isoleret, så slet den også.

- Hver gang det foregående gøres, kryds ikke en kant der, hvis den fjernes, gør at grafen ikke længere er sammenhængende, med mindre der ikke er nogen anden mulighed.

- Gentag forgående skridt indtil der ikke er nogen kanter at krydse længere.

Bemærk vi aldrig ender med en usammenhængende graf, på grund af det sidste trin. For at se dette, antag at vi er nået til en knude u hvor uanset hvilken udgående kant vi sletter vil grafen blive usammenhængende og lad da w være en nabo til u. Bemærk at før vi sletter kanten mellem u og w er der to knuder med ulige valens, nemlig u og v. Ydermere, efter vi sletter kanten fra u til w er der ingen vej fra v til w, da ellers ville grafen stadig være sammenhængende. Men vi ved at enhver graf har et lige antal knuder med ulige valens, så der må være mindst en knude med ulige valens udover u i dens sammenhængskomponent efter vi sletter kanten fra u til w og det må den også have haft til at starte med. Det gælder, da når vi passerer gennem den, ændrer vi ikke på om dens valens er lige eller ulige. Dette er en modstrid. Så ved mindre vi ikke har flere kanter tilbage (og algoritmen er kørt til ende) er der altid mindst en kant vi kan forsætte med thi grafen er altid sammenhængende.

Antag, at algoritmen resulterer i, at vi slutter i en knude der ikke er v. Men hver gang vi har passeret igennem denne knude har vi fjernet 2 kanter, så det ville betyde den har et ulige antal kanter. Det kan ikke lade sig gøre. Derimod kan vi godt slutte i v, for hver gang, vi passerer den, fjerner vi 2 kanter, og vi fjerner en til at starte med og til at slutte med. Derfor er den tur vi har fundet en Euler-tur.

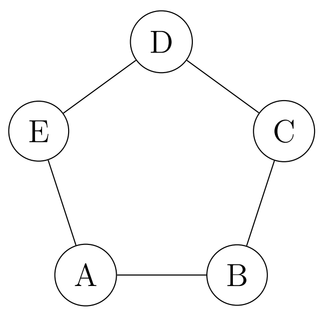
Beviset for 2 forgår ligeledes, man skal blot sørge for at startknuden er med ulige valens. ■

Komplementer, kliker og uafhængige delmængder

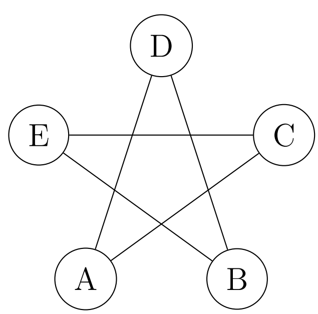
Definition 1.16. Lad G være en simpel graf. *Komplementet* til G er grafen med samme knuder som G, og hvor to knuder er naboer hvis og kun hvis de ikke er naboer i G. Vi betegner komplementet af G som $\overline{G}$ (vi plejer at udtale $\overline{G}$ som "G bar").

Komplementet af en simpel graf er altså grafen, som indeholder alle de "manglende" kanter, der skal til for at få en komplet graf.

Eksempel 1.17. Betragt grafen G herunder:



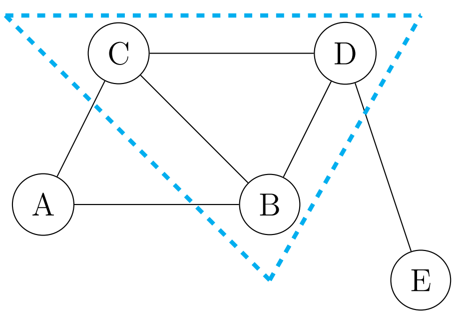
Komplementet til G bliver



Læg mærke til, at hvis man tager disse to grafer og lægger dem "oven i hinanden", så får man den komplette graf med fem knuder, K_5. ○

Til slut i forløbet skal vi se på farvelægning af grafer. I den forbindelse er det smart at kende til kliker og uafhængige delmængder, specielt når vi skal se på det såkaldte *kromatiske tal* for grafer.

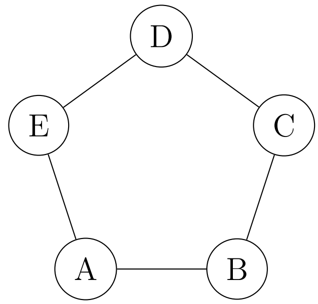
Definition 1.18. Lad G være en simpel graf. En *klike* i G er en mængde af knuder, som er parvist naboer. En *uafhængig delmængde* er en mængde af knuder, som parvist ikke er naboer.



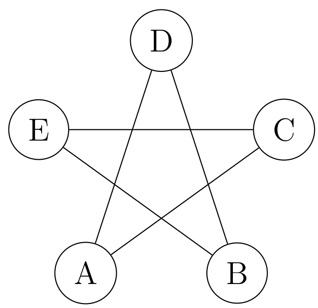
Figur 1.8: B,C,D udgør en klike.

Bemærk, at en klike og en uafhængig delmængde i en simpel graf på en måde er omvendte begreber. Vi kan faktisk sige dette mere præcist, hvilket vi gør om et øjeblik. Først skal vi have nogle eksempler.

Eksempel 1.19. Lad os igen se på grafen fra eksempel eksempel 1.17:



Vi ser, at A og B udgør en klike. Det samme gælder om B og C, C og D og så videre. Vi kan faktisk se, at en klike ikke kan have flere end to knuder i dette eksempel. Vi ser, at A og C udgør en uafhængig delmængde, ligesom A og D gør det. Vi bemærker også, at en uafhængig delmængde maksimalt kan indeholde to knuder. Ser vi på komplementet



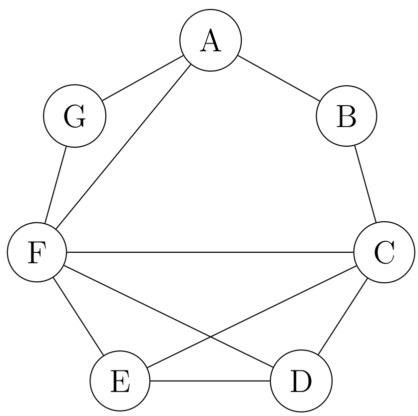
kan vi se, at B, C og C, D bliver uafhængige delmængder, og at A, C og A, D bliver kliker. At kliker bliver til uafhængige delmængder i komplementet og omvendt, gælder generelt, hvilket vi viser herunder. ◦

Sætning 1.20. En klike i G bliver til en uafhængig delmængde i komplementet $\overline{G}$, og en uafhængig delmængde i G bliver til en klike i $\overline{G}$.

Bevis. Lad knuderne $v_1, ..., v_n$ udgøre en klike i G. Da gælder, at alle knuderne $v_1, ..., v_n$ er parvist naboer, altså at de hver især har en kant til alle andre knuder. Altså vil disse knuder parvist ikke have kanter imellem sig i komplementet, med andre ord vil de udgøre en uafhængig delmængde i komplementet. Den anden påstand vises tilsvarende. ■

Lad os se på et andet mere interessant eksempel.

Eksempel 1.21. Vi betrager følgende graf G med syv knuder:



Vi ser, at knuderne A, G, F er parvist naboer, og derfor udgør de en klike. Det samme gælder A, B og C, D, E, F. Dermed har G en klike med både 2, 3 og 4 knuder. Vi ser desuden, at A, C er en uafhængig delmængde, og at B, D, G er en uafhængig delmængde. ○

Når vi skal farvelægge grafer, bliver det vigtigt at se på størrelsen af kliker og uafhængige delmængder.

Definition 1.22. Lad G være en graf. *Kliketallet* for G, betegnet $\omega(G)$ er det maksimale antal knuder, der kan være i en klike i G. *Uafhængighedstallet* for G, betegnet $\alpha(G)$, er det maksimale antal knuder, der kan være i en uafhængig delmængde af G.

ω er et lille omega, hvilket er det sidste bogstav i det græske alfabet. α er et lille alfa og er det første bogstav i det græske alfabet. Dette stemmer i en vis forstand overens med, at kliker og uafhængige delmængder er modsatte begreber.

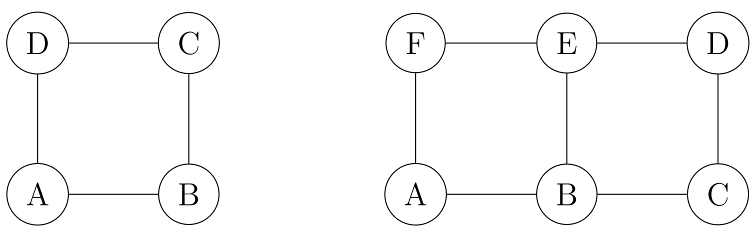
Eksempel 1.23. Lad G være grafen fra eksempel 1.21. Vi ser, at vi kan finde en klike af størrelse 4, nemlig C, D, E, F. Man kan også overbevise sig selv om, at der ikke findes en større klike i G, og derfor er $\omega(G) = 4$. I eksemplet fandt vi også en uafhængig delmængde med tre knuder, nemlig B, D, G, og denne samling af knuder har maksimal størrelse, så $\alpha(G) = 3$. Kan du finde en anden uafhængig delmængde med tre knuder? $\circ$

Todelte grafer

Todelte grafer er en type af grafer, som bliver interessant, når vi skal tale om farvelægning af grafer. I dette afsnit kommer vi også til at gennemgå nogle interessante resultater, som er sværere at bevise i forhold til de sætninger, vi har vist indtil nu.

Definition 1.24. En graf G kaldes *todelt*, hvis knuderne i G kan opdeles i to uafhængige delmængder, hvor ingen knuder i den ene uafhængige delmængde ligger i den anden. Sådanne to uafhængige delmængder kaldes en *todeling* eller en *bipartition*.

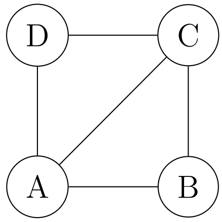
Eksempel 1.25. Betragt de to grafer herunder:



I grafen til venstre har vi A, C og B, D som uafhængige delmængder, og tilsammen udgør disse fire knuder alle knuder i grafen, så den venstre graf er todelt. For grafen til højre kan det ses, at A, E, C og B, D, F udgør en todeling. ∘

Lad os for god orden skyld også betragte et ikke-eksempel på en todelt graf. Med andre ord, et eksempel på en graf, der ikke er todelt.

Eksempel 1.26. Lad G være grafen herunder:



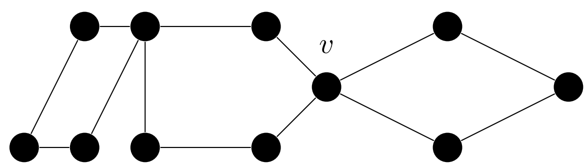
Vi hævder, at G ikke er todelt. Hvis vi har en todeling af grafen, skal A ligge i en af de uafhængige delmængder. Men A er nabo til alle andre knuder, så den ene uafhængige delmængde skal være A. Vi kan dog på samme måde sige, at C bliver nødt til at udgøre sin egen uafhængige delmængde, og dermed mangler vi en uafhængig delmængde med både B og D. Ergo kan en todeling ikke eksistere, så G er ej todelt. $\circ$

Det er ikke svært at forestille sig grafer, hvor det kan blive meget besværligt at afgøre, om den er todelt eller ej. Hvis vi kun har definitionen til rådighed, skal vi tjekke, at samtlige opdelinger ikke fungerer, og det kan hurtigt komme til at kræve meget tid og arbejde. For at lette vores arbejde med at bestemme, om en graf er todelt eller ej, vil vi bruge resten af dette afsnit på at formulere og bevise et kriterium for, om en graf er todelt. Beviserne er fra [3].

Lemma 1.27. Alle lukkede ruter af ulige længde indeholder en kreds af ulige længde.

Bevis. Lad l betegne længden af vores rute. Vi benytter induktion på l. Hvis $l = 1$, må ruten selv udgøre en kreds af længde 1, som er ulige. Dette viser induktionsstarten. Lad nu $l > 1$. Antag først, at der ingen gentagne knuder er i ruten. Fordi ruten er lukket, vil den udgøre en kreds (af ulige længde), så vi er færdige. Antag nu, at der er en knude, v, som besøges to gange i løbet af ruten. Da kan den oprindelige rute opdeles i to ruter, der starter og slutter i v, og disse har begge længde mindre end l. Da l er ulige, skal den ene af ruterne have ulige længde, og induktionsantagelsen giver, at denne mindre rute har en kreds af ulige længde. Dette færdiggør beviset. ■

Vi kan illustrere beviset for lemmaet med følgende tegning:



Man kunne tro, at alle lukkede ruter af *lige* længde må indeholde en kreds af lige længde. Dette er dog ikke rigtigt, se opgave opgave 4.34.

Lemma 1.28. Lad G være en todelt graf. En todeling for G kan findes ved at finde en todeling af alle sammenhængskomponenter.
Mere præcist: Hvis $H_1, ..., H_k$ er sammenhængskomponenterne i G, og vi har en todeling X_i, Y_i af hver H_i, da vil en todeling af G være givet ved at lægge alle X_i'erne sammen og alle Y_i'erne sammen.

Bevis. Lad X være knuderne i $X_1, ..., X_k$ og Y knuderne i $Y_1, ..., Y_k$. Det er klart, at X og Y tilsammen udgør G, og at de ikke har nogle knuder til fælles. Vi mangler da kun at vise, at X og Y hver er uafhængige delmængder. Antag, at v_1 og v_2 er knuder i X, som er naboer. Da bliver v_1 og v_2 nødt til at ligge i samme sammenhængskomponent for G.

Lad os sige, at denne er H_i. Eftersom v_1 og v_2 er naboer, skal vi have, at v_1 og v_2 ligger i hver deres del af todelingen for H_i. Vi kan antage per symmetri, at v_1 ligger i X_i, og at v_2 ligger i Y_i. Men da ligger v_2 i Y, da Y jo indeholder knuderne i Y_i. Men dette er en selvmodsigelse, eftersom v_2 ligger i X per antagelse, og X og Y ingen knuder har tilfælles. Dermed kan ingen knuder i X være naboer, så X er en uafhængig delmængde. Et fuldstændig analogt argument viser, at Y er en uafhængig delmængde. Dette fuldfører beviset. ■

Nu kan vi vise dette afsnits hovedresultat.

Sætning 1.29 (Königs sætning)**.** En graf er todelt hvis og kun hvis den ikke har en kreds af ulige længde.

Bevis. Antag først, at G er en todelt graf. Alle ruter i G hopper skiftevis frem og tilbage mellem de to dele af todelingen. Det følger, at alle kredse bliver nødt til at have lige længde, eftersom en kreds starter i en af de to dele og skal vende tilbage til samme del. Altså har G ingen kredse af ulige længde. Antag nu, at G ingen kredse har af ulige længde. Per forrige lemma er det tilstrækkeligt at vise, at alle sammenhængskomponenter har en todeling, så lad H være en ikke-triviel (dvs. H har mindst én kant) sammenhængskomponent for G (hvis G ikke har sådan en sammenhængskomponent, har G ingen kanter, og en todeling findes oplagt). Lad u være en knude i H. Hvis v er en anden knude i H, lad da $f(v)$ betegne den mindste længde til knuden v fra u. Da H er sammenhængende, eksisterer tallet $f(v)$ for alle v i H. Lad nu X være de knuder i H, hvor $f(v)$ er lige, og Y være de knuder i H, hvor $f(v)$ er ulige. Det er klart, at X og Y ikke har nogle knuder til fælles (et tal er ikke både lige og ulige), og at X og Y tilsammen udgør H. Hvis der var to knuder v_1 og v_2 i X, som var naboer, da ville vi kunne lave en lukket rute fra u til v_1 til v_2 tilbage til u. Bemærk, at denne rute har ulige længde (1 + lige + lige = ulige). Per lemma lemma 1.27 vil denne lukkede rute have en kreds af ulige længde, hvilket er i modstrid med antagelsen om G. Derfor er ingen knuder i X naboer, så X må være en uafhængig delmængde. Beviset for, at Y er en uafhængig delmængde, forløber tilsvarende. Den lukkede rute vil være ulige, fordi summen af to ulige tal er lige, så man opnår den samme modstrid. ■

Sætningen ovenover blev bevist af Dénes König og er derfor opkaldt efter ham. König udgav den første bog om grafteori i 1936 ved navn *Theorie der endlichen und unendlichen Grafen* (på dansk: Teorien om endelige og uendelige grafer) [4].

2 Graffarvelægningsproblemet

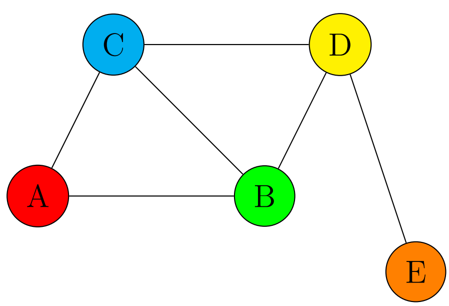
Hvad er en farvelægning?

Vi antager fra nu af, at alle grafer er sammenhængende.

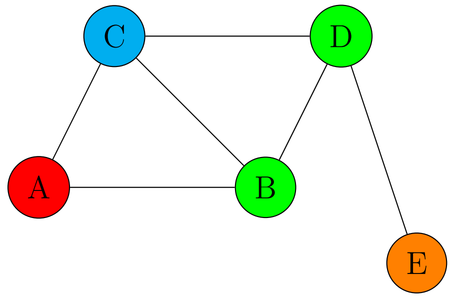
I dette kapitel vil vi arbejde med farvelægning af grafer. I har muligvis hørt om fire-farvesætningen, der siger, at givet et (relativt pænt) kort med forskellige lande, er det altid muligt med fire farver at farvelægge landene således, at ingen nabolande har samme farve. Dette inspirerer følgende definition.

Definition 2.1. En farvelægning af en graf er et valg af farve til enhver kunde, således at ingen naboer har samme farve.

Følgende er en farvelægning.



Det er dog en meget kedelig farvelægning; alle farverne er nemlig forskellige! Følgende er **ikke et eksempel på en farvelægning**,



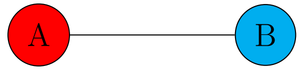
da B og D har samme farve, men også er naboer. Vi kan helt klart slippe afsted med færre end fem farver til den ovenstående graf. Men fem er i hvertfald muligt. Dette motiverer følgende definition.

Definition 2.2. Hvis vi kan finde en farvelægning af en graf, der kun kræver k forskellige farver, siger vi, at den kan k-farves.

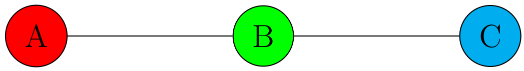
Hvis en graf G har n knuder, kan vi altid farvelægge den med $k = n$ forskellige farver: én per knude! Dog kan man ofte slippe afsted med færre:

Definition 2.3. For en graf G, definerer vi $\chi(G)$ til at være det mindste tal k, så G kan k-farves. $\chi(G)$ kaldes grafen G's *kromatiske tal*.

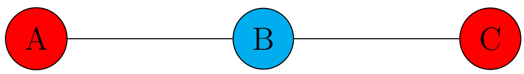
Betragt følgende farvelægning af en graf



Denne farvelægning viser, at G har et kromatisk tal på 2, for vi kan ikke farve den med 1 farve, men 2 er nok. Betragt nu følgende farvelægning af en graf:



Dette viser at at det kromatiske tal for denne graf højest kan være 3, men vi ved ikke om det kunne være lavere. Det kan det faktisk:



Dette er også en farvelægning, så det kromatiske tal er 2. En god taktik til at finde kromatiske tal er følgende

1. Find en farvelægning, der bruger k farver.
2. Vis, at der ikke findes nogen n-farvelægning for $n < k$.

Dog kan dette blive besværligt, så vi har brug for nogle værktøjer.

Nedre grænser

Hvordan relaterer kliketallet $\omega(G)$ sig til det kromatiske tal $\chi(G)$? Vi har følgende resultat:

Sætning 2.4. For en graf G er det kromatiske tal højere end (eller lig med) kliketallet, det vil sige

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$

Bevis. Lad $v_1, \ldots, v_n$ være en samling knuder, som udgør en maksimal klike, det vil sige $n = \omega(G)$. Hvis vi nu farvelægger grafen G, kan vi sige følgende om farverne:

- v_2 er nabo med v_1, så v_2 har ikke samme farve som v_1. Så vi har brug for mindst 2 forskellige farver.
- v_3 er nabo med v_1 og v_2, så v_3 har ikke samme farve som hverken v_1 eller v_2. Så vi har brug for mindst 3 forskellige farver.
- v_4 er nabo med v_1, v_2 og v_3, så v_4 har ikke samme farve som hverken v_1, v_2 eller v_3. Så vi har brug for mindst 4 forskellige farver.
- Og så videre og så videre, indtil vi efter $n - 1$ skridt når til v_n og konkluderer, at vi har brug for mindst n farver.

Sagt med andre ord har vi, at $\omega(G) = n \leq \chi(G)$ ■

Vi kan ligeledes relatere uafhængighedstallet til det kromatiske tal.

Sætning 2.5. For en graf G med n knuder har vi

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$$

Bevis. Farvelæg først G med $k = \chi(G)$ forskellige farver. Hvis vi nummererer farverne med 1,2,3, ...,k, kan vi samle alle knuder farvet med farve 1 i en mængde F_1, farve 2 i F_2 og så videre. Alle knuder er i *præcis* én af de her mængder, så

$$n = |V| = |F_1| + |F_2| + \cdots + |F_k|$$

hvor $|F_i|$ er antallet af knuder i F_i. $|F_i|$ er altid mindre end eller lig med $\alpha(G)$, så

$$\begin{aligned} |F_1| + |F_2| + \cdots + |F_k| &\leq \overbrace{\alpha(G) + \alpha(G) + \cdots + \alpha(G)}^{k \text{ gange}} \\ &= k\alpha(G) = \chi(G)\alpha(G) \end{aligned}$$

Altså har vi, at $\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$. ■

Den grådige algoritme og en øvre grænse

Vi har indtil videre kun set eksempler på størrelser, der giver en nedre grænse for det kromatiske tal $\chi(G)$ for en graf. Men det kunne være rart at have en øvre grænse. Vi vil dog først gennemgå en algoritme til at farvelægge en graf.

Metode 2.6 (Den grådige algoritme)**.** For en graf G, vælg en nummerering af alle knuderne i grafen $v_1, \ldots, v_n$ og vælg ydermere n forskellige farver, og nummerer dem fra 1 til n. Gør nu følgende:

- Farvelæg v_1 med farve nr. 1.
- Gør nu følgende for knude nr. i, v_i:
  - Hvis den ikke har nogen nabo med farve nr. 1, så giv den farve nr. 1. Ellers forsæt til næste skridt.
  - Hvis den ikke har nogen nabo med farve nr. 2, så giv den farve nr. 2. Ellers forsæt til næste skridt.
  - Mønsteret forsættes indtil knuden er farvelagt.

Denne algoritme er afhængig af en nummerering. Hvis vi skal håbe på at få en nogenlunde fornuftig farvelægning med den, så har vi brug for en fornuftig måde at nummerere knuderne.

Definition 2.7. Lad v og u være to knuder i en graf G. Hvis de er forbundne, så lader vi $d(v,u)$ være antallet af kanter i den korteste rute fra v til u. Dette er *afstanden* mellem v og u.

Sætning 2.8. Lad $\Delta(G)$ være den maksimalvalensen for G. Da gælder det, at

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Bevis. Lad $n = n(G)$ være antallet af knuder i G. Vælg en knude v_n, og sortér nu alle knuder $v_1, \ldots, v_n$ efter deres afstand til v_n, så $d(v_i, v_n) \geq d(v_j, v_n)$, når $i < j$. Med andre ord kommer knuderne, der er længst væk fra v_n, først i listen. Vi påstår nu, at hvis vi anvender den grådig algoritme på denne nummerering, så benyttes ikke mere end $\Delta(G) + 1$ farver.

v_1 er farvelagt med farve 1, så ingen problemer der. Lad os nu se, hvad der sker, når vi skal til at farvelægge knude nr. i, hvor $1 < i < n$. v_i har mindst én nabo, der endnu ikke er farvelagt: Vælg blot en knude på den korteste rute fra v_i til v_n. Knuderne på denne rute er ikke farvelagte endnu, da de alle har en mindre afstand til v_n end v_i har. Men v_i har allerhøjest $\Delta(G)$ naboer, hvoraf højest $\Delta(G) - 1$ er farvelagte. Så selv i det værste tilfælde bruger algoritmen farve nr. $\Delta(G)$.

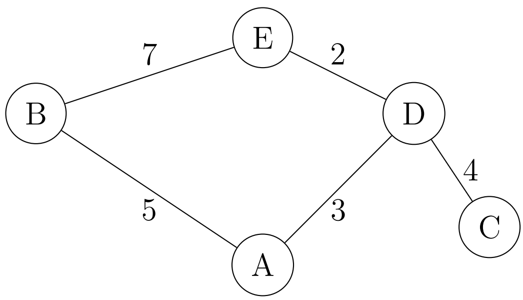
Hvad så med v_n? Den har højest $\Delta(G)$ naboer, så i værste fald bruger den grådige algoritme farve nr. $\Delta(G) + 1$.

Vi kan altså konkludere, at $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. ■

3 Djikstra's algoritme

Vægtede grafer

Før vi kan beskrive Djikstra's algoritme, skal vi lige hurtigt gennemgå en variant af graf-konceptet. En *vægtet graf* er en graf, hvor alle kanter har en værdi. Herunder ses et eksempel:



Figur 1.9: En simpel vægtet graf

Kanternes værdier kan betyde flere ting. Man kan tænke på knuderne som steder og kanterne som afstanden mellem disse. Vægtede grafer dukker op mange steder i virkeligheden. Tænk f.eks. på byer med veje, der forbinder dem. Kig på grafen oven over. Hvis du skal fra by B til by C, hvilken vej er så hurtigst? Det er måske nemt at se i dette eksempel, men hvad hvis du f.eks. skal fra København til Aalborg, hvilken rute er så hurtigst? Hvad hvis du skal køre gennem Europa, og du passerer 1000 byer på vejen? Da er spørgsmålet straks sværere. Vi skal nu udforske, hvordan en GPS kan finde den hurtigste rute mellem to destinationer.

Djikstra's algortime

Med det ude af vejen er vi nu klar til at introducere algoritmen til at finde den korteste vej mellem to knuder i en vægtet graf. Hvad er en algoritme? Du har måske hørt en af datalogerne nævne ordet. En algoritme er blot en følge af instruktioner, der beskriver en proces præcist, hvor et givet input bliver til et bestemt output.

Algoritmen hedder *Djikstra's algoritme*(udtales *deigstra*). For at algoritmen kan begynde, skal den have en startknude og en vægtet graf, hvor alle vægtene (kanternes værdier) er positive. Djikstra's algoritme findes i flere udgaver. Den udgave vi tager udgangspunkt i giver den korteste afstand fra startknuden til alle andre knuder i grafen.

Djikstra's algoritme

1. Vælg en startknude s, og sæt afstanden fra s til alle andre knuder til uendelig, ∞. Markér s som besøgt (en besøgt knude bliver aldrig besøgt igen).

2. Find afstanden til alle naboknuder til s. Udvælg naboknuden med kortest afstand og markér den som besøgt.

3. Udregn afstanden fra s til alle den nuværende knudes naboer. Hvis en af disse afstande er kortere, erstat den gamle afstand med den nye.

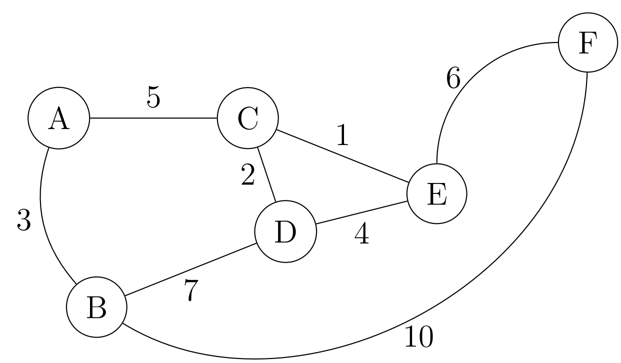
4. Vælg knuden (der ikke nødvendigvis er en nabo), hvor afstanden fra s er kortest, og som ikke allerede er besøgt. Marker denne knude som besøgt.

5. Hop tilbage til trin 3, medmindre alle knuder er besøgt. I sidstnævnte tilfælde er vi færdige.

Bemærkning 3.1. Djikstra's algoritme giver ikke selve vejen som output, kun længden af den korteste vej. Dog er det ofte let at aflæse selve vejen ud fra ens udregninger.

Det kan være noget af en mundfuld, når man støder på sådan en algoritme for første gang. Algoritmen forstås bedst gennem nogle eksempler. Læs dem grundigt! Forståelse for nyt stof kommer kun ved, at man bruger den tid, det tager at forstå det.

Eksempel 3.2. Betragt den vægtede graf:



Figur 1.10: En vægtet grad med 6 punkter.

Vi anvender Djikstra's algoritme til at finde den korteste vej fra A til alle andre knuder. A er vores startknude, så den er implicit markeret som besøgt. Dette er første trin i algoritmen. Vi ser, at A er nabo til knude B og C med afstand 3 og 5. Vi skriver afstandene ned i et skema, hvor afstanden til A står under hver knude:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \rightarrow$	3	5	∞	∞	∞

B har kortest afstand til A. Vi markerer derfor B som besøgt. B har veje til D og F af længde 7 og 10. Vi kopierer disse oplysninger ind i skemaet:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \to$	3	5	∞	∞	∞
$B \to$	✓	5	$3+7$	∞	$3+10$

Husk, at tallene under knuderne er afstanden til A med den vej, vi har fundet! Det ses, at knude C har kortest afstand til A, så den fortsætter vi med. C har en vej til D og E med længde 2 og 1. Den forrige vej til D havde længde $3+7=10$, men vi har fundet en ny vej med længde $5+2=7$! Vi kopierer de nye oplysninger ind i skemaet:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \to$	3	5	∞	∞	∞
$B \to$	✓	5	$3+7$	∞	$3+10$
$C \to$		✓	$5+2$	$5+1$	13

Det ses, at E er knuden med kortest vej til A, som vi endnu ikke har besøgt. E har en vej til F med længde 6, så vi har fundet en kortere vej til F end før. Vi skriver oplysningerne ind:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \to$	3	5	∞	∞	∞
$B \to$	✓	5	$3+7$	∞	$3+10$
$C \to$		✓	$5+2$	$5+1$	13
$E \to$			7	✓	$6+6$

Vi ser, at D er den ikke-besøgte knude, der har kortest afstand til A. D har dog ingen naboer, vi endnu ikke har besøgt. Vi markerer derfor D som besøgt og hopper videre:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \to$	3	5	∞	∞	∞
$B \to$	✓	5	$3+7$	∞	$3+10$
$C \to$		✓	$5+2$	$5+1$	13
$E \to$			7	✓	$6+6$
$D \to$			✓		12

Der er kun F tilbage, som vi markerer som besøgt:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \to$	3	5	∞	∞	∞
$B \to$	✓	5	$3+7$	∞	$3+10$
$C \to$		✓	$5+2$	$5+1$	13
$E \to$			7	✓	$6+6$
$D \to$			✓		12
$F \to$					✓

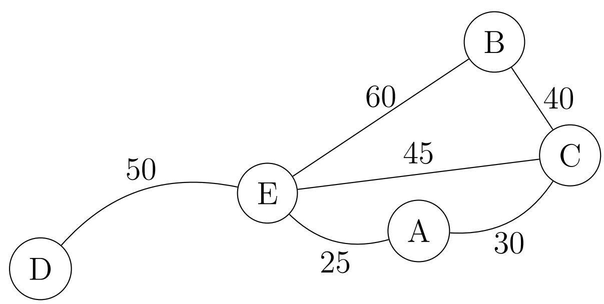
Da der ikke er flere knuder tilbage at tjekke, er vi færdige! Vi aflæser de nederste værdier i skemaet under hver knude og får, at den korteste vej fra:

- A til B er 3
- A til C er 5
- A til D er 7
- A til E er 6
- A til F er 12

○

Lad os tage et andet eksempel, hvor hvert trin ikke gennemgås lige så grundigt som i forrige. Hvis du taber tråden undervejs, er det helt ok. Læs evt. forrige eksempel igen og se, hvor forståelsen glipper. Husk, at du altid kan spørge os!

Eksempel 3.3. Vi betragter den vægtede graf:



Figur 1.11: Endnu en vægtet graf.

Vi vil finde den korteste vej fra A til alle andre knuder. A har veje til C og E, og vi noterer afstandende i skemaet herunder:

Nuværende knude	B	C	D	E
$A \rightarrow$	∞	30	∞	25

E har kortest afstand til A, så den går vi videre med. E har veje til både B, C og D, hvor vejen til C er længere end den direkte vej fra A til C. Vi får derfor:

Nuværende knude	B	C	D	E
$A \rightarrow$	∞	30	∞	25
$E \rightarrow$	$25 + 60$	30	$25 + 50$	✓

C har kortest afstand til A, så den går vi videre med. C har en vej til B, der er kortere end den, vi fandt før. Vi får:

Nuværende knude	B	C	D	E
$A \rightarrow$	∞	30	∞	25
$E \rightarrow$	$25 + 60$	30	$25 + 50$	✓
$C \rightarrow$	$30 + 40$	✓	75	

B har kortest afstand til A, så den fortsætter vi med og får:

Nuværende knude	B	C	D	E
$A \rightarrow$	∞	30	∞	25
$E \rightarrow$	$25 + 60$	30	$25 + 50$	✓
$C \rightarrow$	$30 + 40$	✓	75	
$B \rightarrow$	✓		75	

Vi mangler kun at tjekke D, og vi får:

Nuværende knude	B	C	D	E
$A \rightarrow$	∞	30	∞	25
$E \rightarrow$	$25 + 60$	30	$25 + 50$	✓
$C \rightarrow$	$30 + 40$	✓	75	
$B \rightarrow$	✓		75	
$D \rightarrow$			✓	

Vi kan nu se ud fra skemaet, at den korteste vej fra:

- A til B er 70, nemlig ABC
- A til C er 30, nemlig AC
- A til D er 75, nemlig AED

- A til E er 25, nemlig AE

$\circ$

Som afrunding på afsnittet, vil vi gerne fremhæve følgende vigtige resultat:

Sætning 3.4. Djikstra's algoritme giver den korteste vej.

Bevis. Lad s være startknuden. Lad os sige, at algoritmen har besøgt et vist antal knuder n. Vi vil nu vise følgende induktionshypotese: For alle knuder u har vi, at hvis vi har besøgt den, er distancen algoritmen giver, kald den $d(u)$, den korteste distance fra s til u, og hvis vi ikke har besøgt den endnu, er $d(u)$ den korteste distance, hvis man kun går langs besøgte knuder (eller ∞ hvis der ikke er sådan en rute).

Hvis $n = 1$, er der intet at vise: Vi har nemlig kun besøgt startknuden s.

Antag nu, at sætningen er sand for et eller andet n. Lad u være den næste knude algoritmen markerer som besøgt og dermed tildeler distancen $d(u)$. Vi vil nu vise, at $d(u)$ er den korteste distance fra s til u. En rute, der er kortere end $d(u)$ kan forekomme på to måder: Enten indholder den en knude vi ikke har besøgt endnu, eller også gør den ikke.

I det første tilfælde, lad w være den første knude vi ikke har besøgt endnu på den korteste vej fra s til u. Per induktionsantagelsen er den korteste vej via besøgte knuder til w og u lig med $d(w)$ og $d(u)$, respektivt. Vi bemærker, at $d(u) < d(w)$ (fordi algoritmen valgte u fremfor w) og ydermere har vi, at distancen fra s til u via w minimum er distancen $d(w) + \text{Længden af den kortest vej fra } w \text{ til } u$. Men dette er en modstrid, da længden af den korteste vej fra w til u er et positivt tal, og

$$d(w) + \text{Længden af den korteste vej fra } w \text{ til } u < d(u)$$

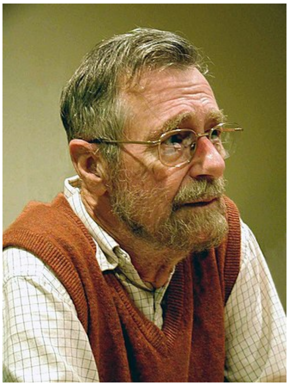
I det andet tilfælde, lad w være den sidste knude før u på den korteste rute fra s til u. Lad D være afstanden fra w til u via den kant, der forbinder dem. Da har vi per antagelse $d(w) + D < d(u)$. Men dette kan aldrig hænde: Da vi allerede har besøgt w, burde $d(u)$ allerhøjest være $d(w) + D$, da algoritmen altid ville opdatere til den korteste fundne distance.

For alle besøgte knuder holder induktionsantagelsen tydeligvis stadigvæk. Og efter vi processerer u, har vi stadig, at for alle ubesøgte knuder w er $d(w)$ den korteste rute via besøgte knuder, da hvis den ikke er via u, har vi den allerede via induktionsantagelsen og hvis den er via u har vi opdateret den.

Efter vi har besøgt alle knuder, viser induktionsantagelsen, at Djikstra's algoritme giver den korteste vej. ■

Om Djikstra

Edsger Wybe Djikstra blev født i Rotterdam, Nederlandene i 1930. Han læste matematik og teoretisk fysik i Leiden, men skiftede senere til datalogi/computer-videnskab, som var hans store interesse [5].



Figur 1.12: Djikstra i 2002. Kilde: [6]

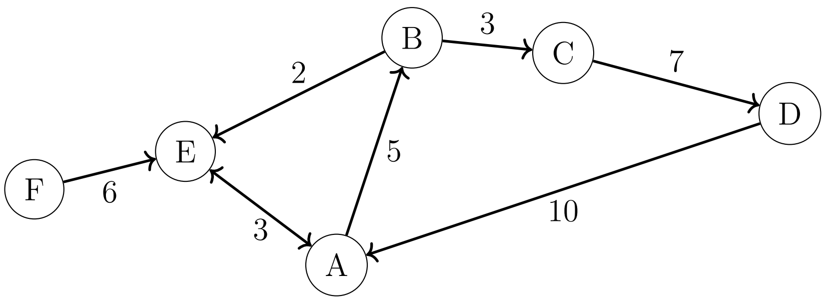
Djikstra arbejdede med mange ting inden for datalogi. Han arbejdede med grafteoretiske algoritmer, hvor han udviklede Djikstra's algoritme, som I netop har arbejdet med. Han forskede også en del i styresystemer og programmeringssprog. Han skrev meget om det at strukturere computerprogrammer, hvor han havde meget klare holdninger til, hvordan programmer skulle skrives effektivt og overskueligt. Han talte stærkt for, at algoritmer skulle opbygges matematisk, så korrektheden af programmet kunne bevises ud fra dets konstruktion. Djikstra's tanker om programstrukturer førte til udviklingen af de programmeringssprog, vi bruger i dag. F.eks. er han delvist ansvarlig for, at løkker er så udbredte i størstedelen af programmeringssprog. I de sidste år af hans liv arbejdede han med matematiske bevisteknikker og deres anvendelser i datalogi [6].

Djikstra har modtaget mange priser, herunder den prestigefyldte Turing-pris i 1972 og IEEE Computer Science Pioneer-prisen i 1980. I dag præger hans ideer stadig datalogi og softwareudvikling [6].

Djikstra døde i 2002.

Orienterede grafer

Det sidste emne i forløbet er orienterede grafer. Når først I har fået styr på vægtede grafer, er dette emne ikke så svært. En *orienteret graf* er en graf, hvor kanterne har en retning. Herunder ses et eksempel:



Figur 1.13: Orienteret og vægtet graf

I mange byer vælger man at ensrette vejene, så trafikken glider lettere. Man kan tænke på knuderne som steder i byen og kanterne som veje. Hvad gør vi, hvis vi vil finde den korteste vej fra knude A til de andre knuder? Vi anvender selvfølgelig Djikstra's algoritme! Vi skal bare tage hensyn til vejenes retning. F.eks. kan vi gå direkte fra knude D til A, men ikke omvendt. Vejenes retning tvinger os til at tage en omvej. Bemærk desuden, at der ikke findes en vej fra A til F.

Eksempel 3.5. Vi finder den korteste vej fra A til alle andre knuder i grafen fra figur 1.13. Vi gør fuldstændig som i de tidligere eksempler og laver et skema. A har en vej til B og E:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \rightarrow$	5	∞	∞	3	∞

E har den korteste vej til A, så den fortsætter vi med. E har dog ingen veje til andre knuder, vi ikke allerede har besøgt, så vi får bare:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \rightarrow$	5	∞	∞	3	∞
$E \rightarrow$	5	∞	∞	✓	∞

B har den korteste vej til A, så den går vi videre med. B har veje til C og E, men E er allerede besøgt, så vi får:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \rightarrow$	5	∞	∞	3	∞
$E \rightarrow$	5	∞	∞	✓	∞
$B \rightarrow$	✓	$5+3$	∞		∞

C har kortest afstand til A, så den fortsætter vi med. C har en vej til D, og vi får:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \rightarrow$	5	∞	∞	3	∞
$E \rightarrow$	5	∞	∞	✓	∞
$B \rightarrow$	✓	$5+3$	∞		∞
$C \rightarrow$		✓	$8+7$		∞

Nu er vi faktisk færdige. D har kortest afstand til A af de ikke-besøgte knuder, men D har ingen naboer, vi ikke allerede har besøgt. Så er der kun F tilbage, men A har ingen vej til F, så afstanden fra A til F er ∞. Vi har altså:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \rightarrow$	5	∞	∞	3	∞
$E \rightarrow$	5	∞	∞	✓	∞
$B \rightarrow$	✓	$5+3$	∞		∞
$C \rightarrow$		✓	$8+7$		∞
$D \rightarrow$			✓		∞
$F \rightarrow$					✓

Og vi kan konkludere, at den korteste vej fra:

- A til B er 5, nemlig AB
- A til C er 8, nemlig ABC
- A til D er 15, nemlig $ABCD$
- A til E er 3, nemlig AE
- A til F er ∞, da der ikke findes en vej fra A til F

$\circ$

4 Opgaver

• **Opgave 4.1:**
Tegn følgende:

1) En graf med tre knuder med valens 1, 2 og 3.

2) En graf med fire knuder alle med valens 1.

3) En graf med fem knuder med valens 1, 1, 2, 2 og 4.

4) En ikke-sammenhængende graf med fire knuder, alle med valens 2.

5) Hvor mange sammenhængskomponenter er der i hver af de grafer, som du har tegnet?

• **Opgave 4.2:**
Tegn dit hus/din lejlighed som en graf, hvor et værelse er en knude, og kanterne vejene mellem disse. Hvordan kan man f.eks. håndtere flere etager?

• **Opgave 4.3:**
Tegn en sammenhængende graf uden løkker, der indeholder netop 2 kredse. Find maksimal- og minimalvalensen.

• **Opgave 4.4:**
Hvor mange grafer kan du tegne, som er sammenhængende, simple, og hvor alle knuder har lige valens? Kender du nogle i forvejen? Hvor mange findes der?

•• **Opgave 4.5:**
Tegn graferne:

1) Den komplette graf med 5 knuder, K_5. Find maksimal- og minimalvalensen.

2) Kredsgrafen med 6 knuder, C_6. Find maksimal- og minimalvalensen.

3) En sammenhængende graf med 7 knuder. Knuderne skal have valens 1, 2, 3, 4, 5, 6 og 7.

●● **Opgave 4.6:**
Tegn en graf med 4 knuder. Knuderne skal have valens 1, 2, 2 og 3. Findes en graf med fire knuder af valens 1, 2, 2 og 4? Hvis ja, tegn den. Hvis nej, hvorfor ikke?

●● **Opgave 4.7:**
Se på K_n og C_n. For hvilke værdier af n er disse grafer ens? Husk, at $n \geq 3$. Hvad er maksimal- og minimalvalensen for disse grafer?

●● **Opgave 4.8:**
I disse opgaver skal vi se på, om det er muligt i en gruppe af personer, at hver person er ven med et bestemt antal personer i gruppen. Vi antager, at hvis person x er ven med person y, er person y også ven med person x. Hvis det er muligt, tegn da en graf, som illustrerer vennerelationerne.

1) Antag, at gruppen er på 4 personer. Er det muligt for alle gruppemedlemmer at være venner med præcist 2 andre i gruppen?

2) Antag, at gruppen er på 7 personer. Er det muligt, at alle gruppemedlemmer er venner med præcist 5 andre i gruppen?

3) Antag, at gruppen er på 57 personer. Er det muligt, at alle gruppemedlemmer er venner med præcist 33 andre i gruppen?

●● **Opgave 4.9:**
Vis, at der i alle grafer er et lige antal knuder med ulige valens.

●● **Opgave 4.10:**
Vis, at alle sammenhængende grafer med n knuder har mindst $n - 1$ kanter.

••• **Opgave 4.11:**

1) Vis, at K_n har $\frac{n(n-1)}{2}$ kanter [Vink: Tegn K_n for f.eks. $n = 5$ og tæl op for hver kant, brug dette til at give et argument for det generelle tilfælde].

2) Vis, at en simpel graf med n knuder højst kan have $\frac{n(n-1)}{2}$ kanter.

3) Find en simpel graf, der har dobbelt så mange kanter, som den har knuder [Vink: brug første delopgave].

••• **Opgave 4.12:**
I denne opgave indfører vi et nyt begreb, nemlig et *træ*. Et træ er en sammenhængende graf uden nogle kredse.

1) Tegn et træ med henholdsvis 3, 5 og 10 knuder.

2) Giv et argument for, at et træ bliver nødt til at være simpelt.

3) Hvor mange træer findes der med 4 knuder? Hvad med 5 knuder?

4) Findes et træ med 7 knuder og 7 kanter? Hvis ja, tegn træet. Hvis nej, hvorfor?

5) Hvor mange kanter er i et træ med n knuder? [Vink: brug opgave 4.10. Hvad sker der, hvis man tilføjer flere kanter?]

6) Hvad er den totale valens for et træ med n knuder?

Vi konkluderede i eksempel 1.13, at alle kredsgrafer har lukkede Euler-ture. I de næste tre opgaver ser vi på de to andre typer af standardgrafer K_n (komplet graf) og P_n (vejgraf) og undersøger, om disse har Euler-ture (åbne eller lukkede).

• **Opgave 4.13:**
[Vink: Tegn graferne!]

1) Har P_4 en Euler-tur? Hvis ja, er den så åben eller lukket?

2) Har P_5 en Euler-tur? Hvis ja, er den så åben eller lukket?

3) Har P_6 en Euler-tur? Hvis ja, er den så åben eller lukket?

4) Har en vilkårlig vejgraf P_n en Euler-tur? Hvis ja, er den så åben eller lukket?

●● **Opgave 4.14:**
[Vink: Tegn graferne!]

1) Har K_4 en Euler-tur? Hvis ja, er den så åben eller lukket?

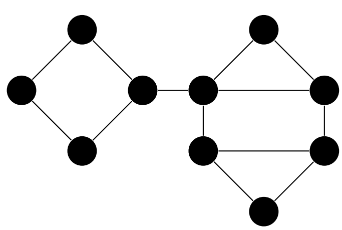
2) Har K_5 en Euler-tur? Hvis ja, er den så åben eller lukket?

3) Har K_6 en Euler-tur? Hvis ja, er den så åben eller lukket?

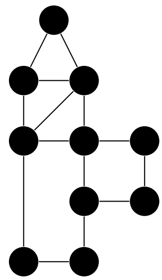
4) Hvilke komplette grafer har en Euler-tur? Hvad skal der gælder om n?

●● **Opgave 4.15:**
Denne opgave er fra [1]. Afgør om graferne har en lukket eller åben Euler-tur, og find om muligt en.

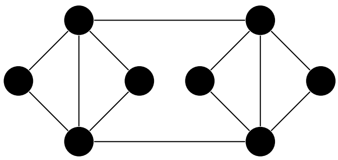
1)



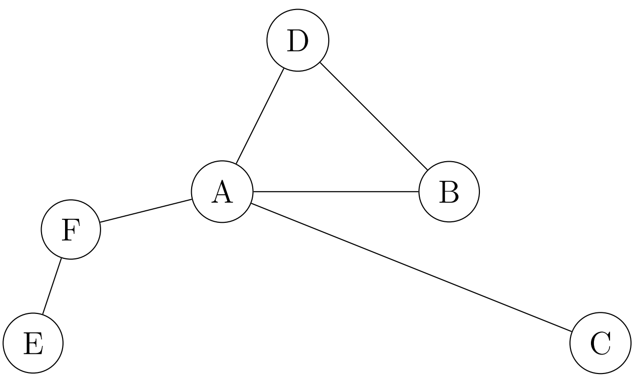
2)



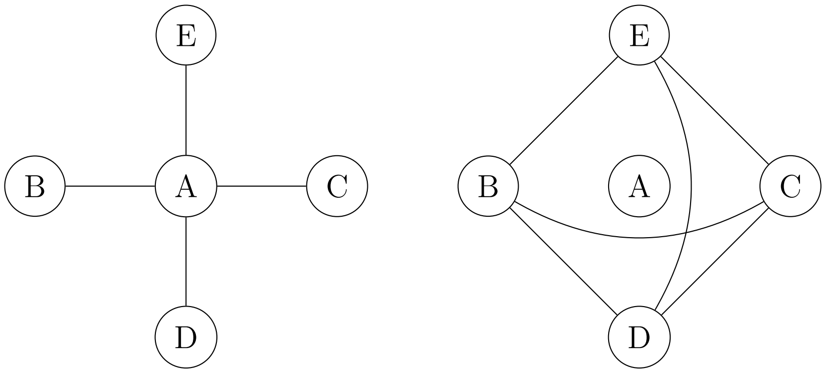
3)



- **Opgave 4.16:**
  Tegn komplementet til grafen herunder:



- **Opgave 4.17:**
  Tegn komplementet til hver af de to grafer herunder:



●● **Opgave 4.18:**
Lad G være en simpel graf med n knuder. Vis, at $G = K_n$, hvis og kun hvis $\overline{G}$ ingen kanter har. [Husk, at "hvis og kun hvis" betyder "er det samme som".]

●● **Opgave 4.19:**
Lad G være grafen i eksempel 1.21. Tegn komplementet for G og vis, at de fundne kliker i eksemplet bliver til uafhængige delmængder i $\overline{G}$.

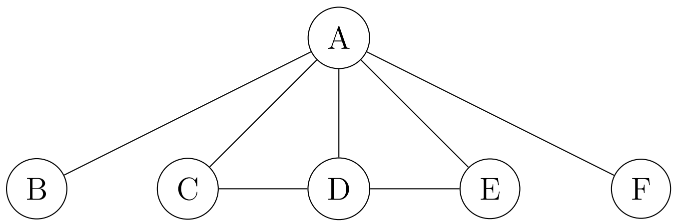
● **Opgave 4.20:**
Bestem kliketallet og uafhængighedstallet for grafen i opgave 4.16.

● **Opgave 4.21:**
Bestem kliketallet og uafhængighedstallet for graferne i opgave 4.17.

●● **Opgave 4.22:**
Hvad er kliketallet og uafhængighedstallet for den komplette graf med n knuder, K_n?

●● **Opgave 4.23:**
Lad G være en simpel graf. Vis, at $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ og $\alpha(\overline{G}) = \omega(G)$. Med andre ord: uafhængighedstallet af G er lig kliketallet for $\overline{G}$ og omvendt.

● **Opgave 4.24:**
Bestem kliketallet og uafhængighedstallet for grafen G tegnet herunder:



●● **Opgave 4.25:**
Hvad er kliketallet og uafhængighedstallet for vejgrafen med n knuder, P_n? [Vink: Kig på tilfældende, hvor der er 1, 2, 3, 4 og 5 knuder og se, om du kan gennemskue et mønster.]

●●● **Opgave 4.26:**
I denne opgave vil vi bestemme kliketallet og uafhængighedstallet for kredsgraferne.

1) Udfyld tabellen herunder:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\omega(C_n)$								
$\alpha(C_n)$								

2) Baseret på den tabel, du udfyldte i forrige opgaver, kan du forklare mønsteret i kliketallet og uafhængighedstallet?

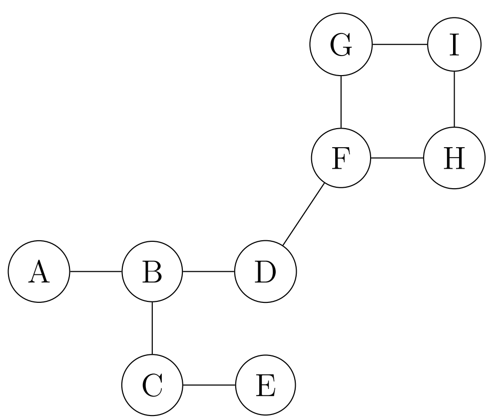
Kan du give en eksplicit formel (muligvis for tilpas store n)?

●● **Opgave 4.27:**
Brug Königs sætning til at give et nemmere bevis for, at grafen i eksempel 1.26 ikke er todelt.

● **Opgave 4.28:**
Er grafen i eksempel 1.21 todelt? Hvad med grafen i opgave 4.24?

●● **Opgave 4.29:**
Forklar, hvorfor at alle træer er todelte. Kan du give en fremgangsmåde til at finde en todeling af et træ med n knuder? Se opgave 4.12. Hvis du ikke har lavet opgaven om træer, kan du springe denne opgave over.

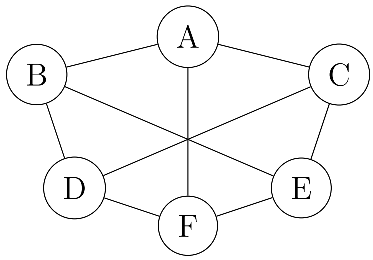
●● **Opgave 4.30:**
Betragt grafen G herunder:



1) Vis, at grafen er todelt ved at bruge Königs sætning.

2) Find en todeling af grafen.

Opgave 4.31:
Betragt grafen G herunder:



1) Vis, at grafen er todelt ved at bruge Kónigs sætning.

2) Find en todeling af grafen.

Grafen G er et eksempel på en såkaldt *Haar*-graf, og den betegnes $H(7)$.

Opgave 4.32:
Vi skal i denne opgave undersøge, hvilke komplette grafer, der er todelte. Som sædvanligt er Königs sætning et godt sted at starte.

1) Er K_2 todelt?

2) Er K_n todelt, når n er større end 2?

Opgave 4.33:
I denne opgave undersøger vi, hvornår kredsgraferne er todelte.

1) Er C_2, C_4 og C_6 todelte?

2) Er C_3, C_5 og C_7 todelte?

3) For hvilke værdier af n er C_n todelt?

Opgave 4.34:
Giv et eksempel på en lukket rute af lige længde, som ikke har en cykel af lige længde. Konkludér, at lemma 1.27 kun gælder for lukkede ruter af ulige længde.

Opgave 4.35:
I denne opgave viser vi, at for en todelt graf G gælder det, at en todeling er unik hvis og kun hvis G er sammenhængende.

1) Antag, at G *ikke* er sammenhængende, dvs. der er mindst to sammenhængskomponenter. Vis, at der findes mindst to forskellige måder at lave en todeling på. [Vink: lemma 1.28, læs evt. beviset for at få den rigtige idé].

Den første opgave viser, at hvis G har en unik todeling, så er G sammenhængende (vi kalder denne bevisstrategi for *kontraposition*). Antag, nu at G er sammenhængende og lad X, Y være en todeling af G. I de følgende delopgaver viser vi, at todelingen X, Y er unik. Lad v være en knude i X.

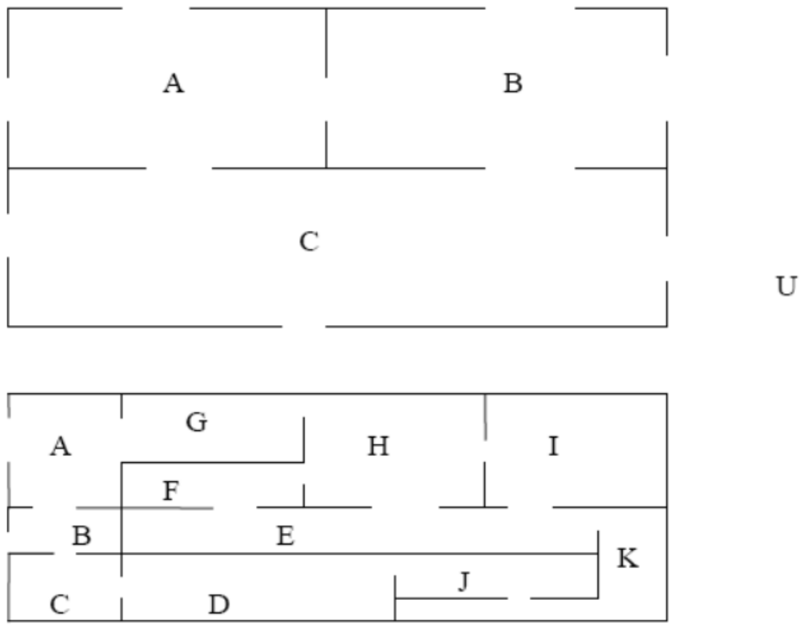
2) Lad X', Y' være en todeling af G. Vi kan per symmetri antage, at v ligger i X'. Vi er da færdig, idet vi har vist, at $X' = X$. Hvorfor?

3) For at vise, at $X' = X$, skal vi vise, at for en knude v' i X' skal v' også ligge i X. Antag for modstrid, at v' ligger i Y. Forklar, hvorfor der findes en rute fra v til v'.

4) Hvorfor har ruten fra v til v' ulige længde? [Vink: læs første del af beviset for Königs sætning.]

5) Brug forrige delopgave til at vise, at v' ligger i Y'. Forklar hvorfor, at dette er en modstrid og konkludér, at v' ligger i X.

Opgave 4.36:
Denne opgave er fra [1]. Herunder er tegnet en plan over to huse. Tegn passende grafer over begge huse, så rummene er knuder og dørene kanter (betragt haven U som et rum i hvert hus). Afgør herefter, om det er muligt at gå en tur gennem huset, så man går gennem hver dør netop én gang.



Figur 1.14: Plan over de to huse.

●● **Opgave 4.37:**
Kan man finde en lukket Euler-tur over broerne i Königsberg?

●● **Opgave 4.38:**
Kan man finde en åben Euler-tur over broerne i Königsberg?

●●● **Opgave 4.39:**
Lad G være en graf med en lukket Eulertur.

1) Bevis, at G er sammenhængende.

2) Bevis, at alle knuder i G har lige valens.

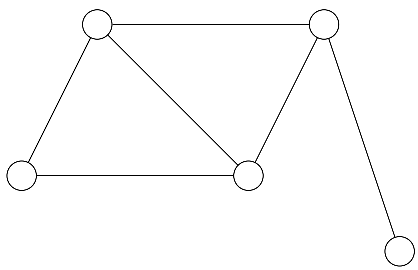
●●● **Opgave 4.40:**
Lad G være en graf med en åben Eulertur.

1) Bevis, at G er sammenhængende.

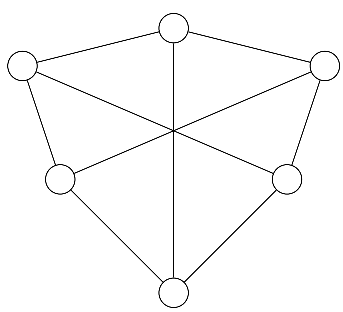
2) Bevis, at netop to knuder i G har ulige valens. [Vink: hvad skal gælde om valensen af de knuder, som turen starter og slutter i? Hvad med alle andre knuder?]

- **Opgave 4.41:**
  Kan alle grafer farvelægges?

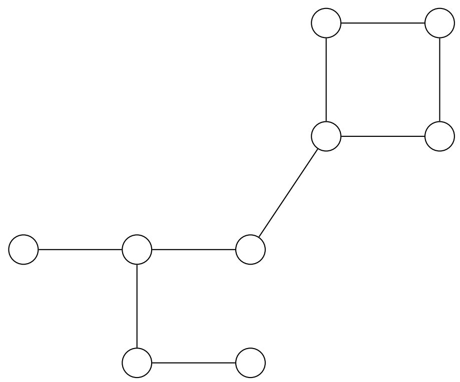
- **Opgave 4.42:**
  Find det mindste k, så følgende graf kan k-farves, dvs. en optimal farvelægning med $\chi(G)$ farver.



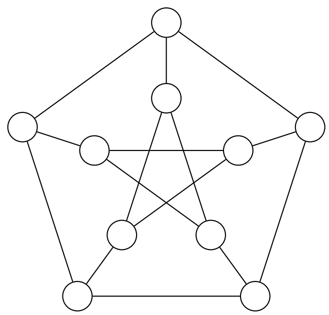
- **Opgave 4.43:**
  Find det mindste k så følgende graf kan k-farves, dvs. en optimal farvelægning med $\chi(G)$ farver.



• **Opgave 4.44:**
Find det mindste k så følgende graf kan k-farves, dvs. en optimal farvelægning med $\chi(G)$ farver.



•• **Opgave 4.45:**
Find det mindste k så følgende graf kan k-farves, dvs. en optimal farvelægning med $\chi(G)$ farver.



•• **Opgave 4.46:**
I denne opgave undersøger vi grænsen $\omega(G) \leq \chi(G)$:

1) Findes der en graf G hvor $\omega(G) = \chi(G)$?

2) Findes der en graf G hvor $\omega(G) < \chi(G)$?

●● **Opgave 4.47:**
I denne opgave undersøger vi grænsen $n(G)/\alpha(G) \leq \chi(G)$:

1) Findes der en graf G hvor $n(G)/\alpha(G) = \chi(G)$?

2) Findes der en graf G hvor $n(G)/\alpha(G) < \chi(G)$?

●● **Opgave 4.48:**
I denne opgave undersøger vi grænsen $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$:

1) Findes der en graf G hvor $\chi(G) = \Delta(G) + 1$?

2) Findes der en graf G hvor $\chi(G) < \Delta(G) + 1$?

●● **Opgave 4.49:**
Lad G være en graf. Antag, at maksimalvalensen er mindre end eller lig med to.

1) Hvad kan man sige om $\chi(G)$? Hvor stor og hvor lille kan den blive?

2) Findes der grafer, der opnår de grænser du har fundet for $\chi(G)$?

●● **Opgave 4.50:**
Lad G være en graf. Antag, at maksimalvalensen er mindre end eller lig med fem.

1) Hvad kan man sige om $\chi(G)$? Hvor stor og hvor lille kan den blive?

2) Findes der grafer, der opnår de grænser du har fundet for $\chi(G)$?

●● **Opgave 4.51:**
I definition 2.6 er den grådige algoritme beskrevet. Finder den altid den optimale farvelægning? [Vink: Prøv at bruge den grådige algoritme på nogle grafer.]

●● **Opgave 4.52:**
Finder den grådige algoritme nogensinde en optimal farvelægning. [Vink: Prøv at bruge den grådige algoritme på nogle grafer.]

●●● **Opgave 4.53:**
Er der nogen grænse for hvor mange farver den grådige algoritme bruger udover dem der er krævet til en optimal farvelægning? [Vink: Du kan bruge de forrige opgaver her.]

● **Opgave 4.54:**
Find på nogle grafer der kan 2-farves.

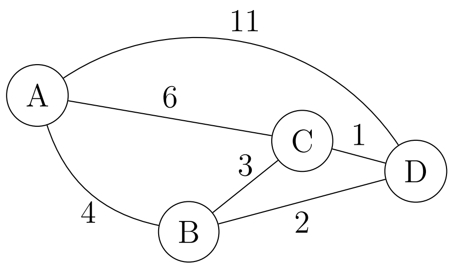
●● **Opgave 4.55:**
Find på nogen betingelser for at en graf kan 2-farves. [Vink: Tag udgangspunkt i den forrige opgave.]

●● **Opgave 4.56:**
Find nogen betingelser, som er nødvendige for at kunne 2-farves. Dvs. betingelser som hvis de ikke er opfyldt garantere, at grafen ikke kan 2-farves.

●●● **Opgave 4.57:**
Find på en graf, med højst 10 kanter, som kræver mange farver at farve.

● **Opgave 4.58:**

1) Brug Djikstra's algoritme til at finde længden af den korteste vej fra A til D i følgende graf:

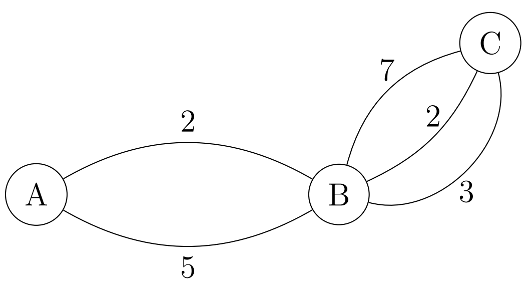


og bestem selve den korteste vej.

2) Bestem selve de korteste veje fra A til alle andre knuder i grafen fra eksempel 3.2.

- **Opgave 4.59:**
 Giv et eksempel på en vægtet graf, hvor den korteste vej mellem to knuder ikke er entydig, altså der er flere forskellige korteste veje. Vælg din yndlingsknude og anvend Djikstra's algoritme på din graf.

- **Opgave 4.60:**
I denne opgave skal I overveje, hvad vi skal gøre mht. Djikstra's algoritme, hvis en graf har to eller flere veje mellem to knuder, f.eks.:



1) Når vi skal finde korteste veje, hvorfor kan vi så bare antage, at en vægtet graf kun har én vej mellem to naboknuder?

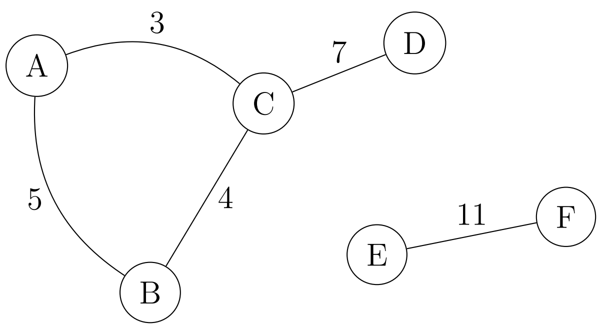
2) Hvad gør vi, hvis en graf har knuder med løkker?

3) Hvorfor kan vi uden problemer antage i dette afsnit, at alle grafer er simple?

Opgave 4.61:

1) Kan vi stadig bruge Djikstra's algoritme på en ikke–sammenhængende graf? Og i så fald, hvordan?

2) Se grafen herunder:

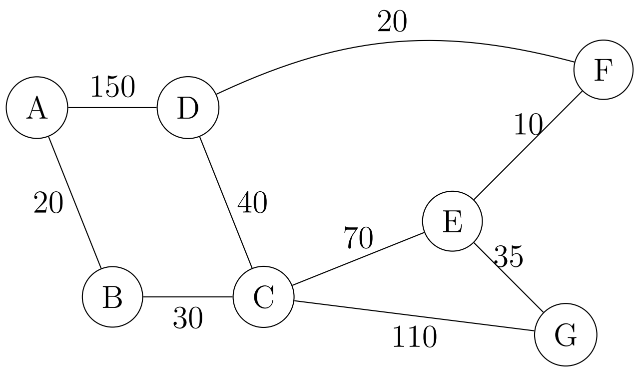


Med overvejelserne fra 1) i tankerne, hvad er den korteste afstand fra A til F?

3) Overvej til slut, hvorfor vi mon sætter afstanden fra startknuden til de andre knuder til uendelig ∞ i starten af algoritmen.

Opgave 4.62:

Superman befinder sig i by A og har hørt, at der er problemer i by G. Godt nok flyver Superman hurtigt, men han vil stadig gerne skulle tilbagelægge så kort en afstand som muligt. Heldigvis kender Superman alle ruter mellem byerne. Ud fra følgende graf, find længden af den korteste vej fra A til G samt selve vejen:



●● Opgave 4.63:

Overbevis dig selv om, at følgende påstande må gælde for en vægtet graf, G, hvori A og B er knuder (du må ikke benytte Djikstra's algoritme i dit argument!):

1) Hvis der findes en vej fra A til B, findes også en kortest mulig vej fra A til B.

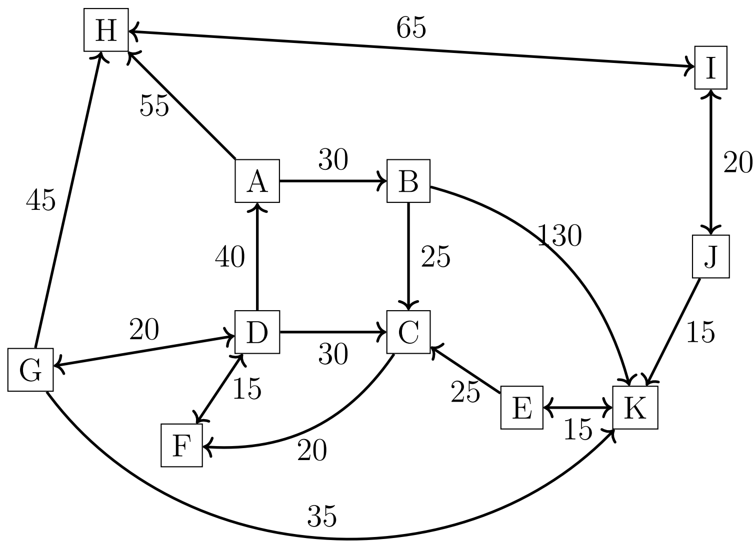
2) Antag, at den korteste vej fra A til B går gennem en knude C. Da er den del af vejen fra A til B, som går mellem A og C, den korteste vej fra A til C. Med andre ord: korteste veje er opbygget af korteste veje.

[Vink: tegn situationerne!]

●● Opgave 4.64:

Tegn selv en vægtet graf og find længden af den korteste vej mellem din yndlingsknude og alle andre knuder.

Opgave 4.65:
Batman sidder i Batmobilen ved boligblok A, idet han hører, at der er et røveri i gang ved boligblok K. Hans GPS giver ham følgende graf, der viser de mulige veje dertil:



Bemærk, at en del af vejene er ensrettede! Hvad er længden af den korteste vej fra Batmans position til røverne? Og hvad er selve den korteste vej?

2 Anvendt Lineær Algebra

1 Vektorer, matricer og regneoperationer

Velkommen til forløbet om lineær algebra! Lineær algebra er en særdeles vigtig og brugbar gren af matematikken. Lineær algebra finder anvendelser i datalogi, statistik og dataanalyse, fysik, kemi, løsning af differentialligninger og meget andet. I det her forløb vil vi primært have et anvendt fokus, og der vil derfor ikke være samme fokus på beviser. Vi indfører også kun nye begreber, når vi får brug for det. Vi arbejder heller ikke i den største generalitet, men holder os til de reelle tal $\mathbb{R}$ hele vejen igennem.

I første del af forløbet introducerer vi de mest grundlæggende definitioner og begreber. Vi skal se kort på vektorer, som en del af jer nok allerede er bekendte med fra gymnasiet. Derefter ser vi på matricer og på, hvordan vi regner med dem. Lad os starte med at få de vigtigste mængder i forløbet på plads.

Definition 1.1. En n-dimensional (reel) *vektor* er en ordnet liste

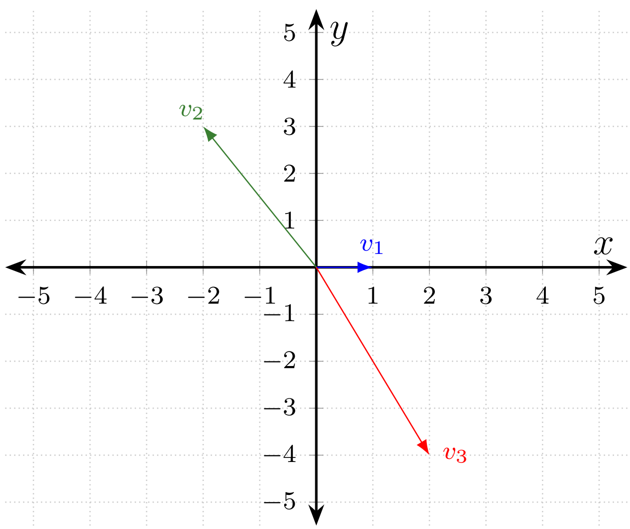
$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

hvor $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ kaldes vektorens *indgange*. Mængden af n-dimensionelle vektorer betegnes $\mathbb{R}^n$.

Eksempler på vektorer i $\mathbb{R}^2$ er

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Disse vektorer kan nemt illustreres. Den øverste koordinat indikerer, hvor langt ud af første-aksen, man skal gå, mens andenkoordinaten indikerer, hvor langt ud af andenaksen, man skal gå. De tre vektorer ser sådan ud i planet:



Princippet med vektorer i $\mathbb{R}^3$ er det samme. I er velkomne til at tænke på en vektor

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

i $\mathbb{R}^3$ som et punkt med koordinaterne (x, y, z). Selvom en vektor er defineret som en søjle, vil vi ofte bedrive misbrug af notation og skrive $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ for en vektor. Vi indfører nu to fundamentale regneoperatorer for vektorer, nemlig addition og skalarmultiplikation. Disse er defineret som følger.

Definition 1.2. Lad $v_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $v_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ og $a \in \mathbb{R}$. Summen af v_1 og v_2 er defineret som

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

og skalarmultiplikationen af a på v_1 er defineret som

$$a \cdot v_1 = a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 \\ a \cdot x_2 \\ \vdots \\ a \cdot x_n \end{pmatrix}$$

hvor $\cdot$ inde i vektoren er almindelig multiplikation af reelle tal.

Bemærkning 1.3. Definitionen ovenover forudsætter, at de to vektorer v_1 og v_2 har samme dimension. Vi har ingen definition af addition for vektorer med forskelligt antal indgange. F.eks. giver det ikke mening at lægge vektorerne

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sammen.

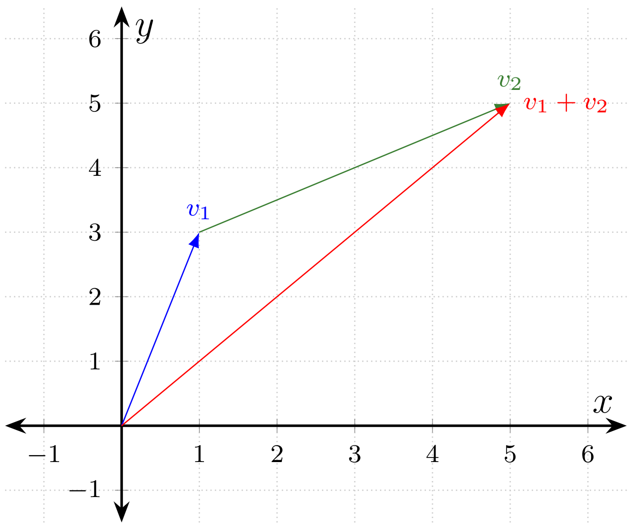
Både addition af vektorer og skalarmultiplikation har en geometrisk fortolkning. Summen af to vektorer giver vektoren, som fås ved at lægge de to vektorer i forlængelse af hinanden. Lad os se på vektorerne

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Deres sum er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

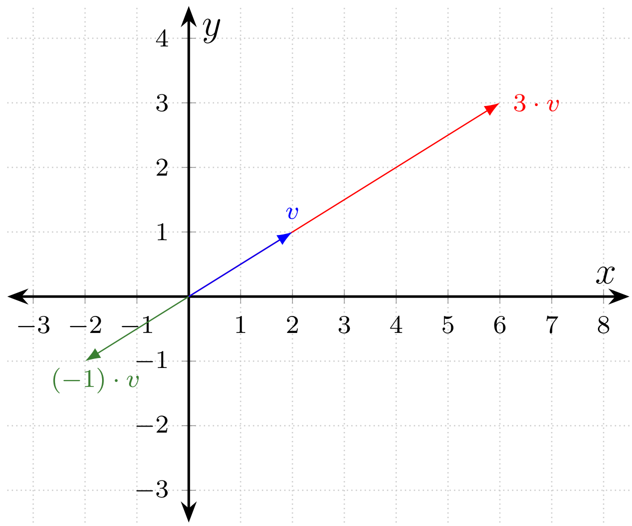
og i et koordinatsystem ser det hele således ud:



Skalarmultiplikation skal fortolkes som en skalering. Betragt vektoren

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Skalerer vi vektoren med henholdsvis -1 og 3 fås



Skalarmultiplikation med -1 er et vigtig specialtilfælde, da det svarer til at spejle vektoren. Den skalerede vektor har samme længde, men peger i den modsatte retning. Inden vi bevæger os videre til matricer, vil vi nævne, at $\mathbb{R}^n$ er et eksempel på en mængde med struktur kaldet et *vektorrum*. Den mere teoretiske side af lineær algebra beskæftiger sig med generelle (abstrakte) vektorrum samt særlige afbildninger mellem disse kaldet *lineære* afbildninger. Vi er nu klar til at se på matricer.

Definition 1.4. En $m \times n$*-matrix* A er et skema af reelle tal i m *rækker* og n *søjler*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

hvor $a_{ij} \in \mathbb{R}$ betegner det reelle tal i række i og søjle j. Disse kaldes matricens *indgange*. Mængden af $m \times n$-matricer betegnes $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Vi bruger som regel store bogstaver $A, B, C, \ldots$ til at betegne matricer og de tilhørende små bogstaver til at betegne deres indgange. Et eksempel på matricer i $\mathbb{R}^{2\times 3}$ er

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 11 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

mens matricer i $\mathbb{R}^{3\times 3}$ kunne være

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 10 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

I mange henseender er $n \times n$-matricer (altså matricer med samme antal rækker og søjler) særligt interessante. De kaldes *kvadratiske* matricer. Det skal vi se senere, når vi arbejder med inverse matricer. Matricen C ovenover er vi i øvrigt ikke helt tilfældig med, da den spiller en meget central rolle senere. Faktisk er den så vigtig, at den har en særlig betegnelse. I definitionen nedenunder definerer vi en række centrale matricer og vektorer.

Definition 1.5. $0 \in \mathbb{R}^n$ defineres til at være vektoren, hvori alle indgange er 0:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Denne vektor betegnes *nulvektoren. Nulmatricen* $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ defineres tilsvarende til at være den kvadratiske matrix med n rækker og søjler, hvori alle indgange er 0:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ defineres til at være den kvadratiske matrix, hvor diagonalen består af 1-taller, og alle andre indgange er 0:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1. \end{pmatrix}$$

I_n kaldes *identitetsmatricen* af dimension n.

Bemærkning 1.6. Bemærk, at nulvektoren opfylder $0 + v = v + 0 = v$ for alle $v \in \mathbb{R}^n$. Dermed spiller nulvektoren samme rolle som 0 gør i de reelle tal.

Matricer er brugbare, fordi de indeholder information på en form, vi kan regne med. Vi skal dog først have defineret, hvordan vi kan regne med matricer. Tilfældet med addition minder meget om addition af vektorer, men når vi indfører multiplikation af matricer, bliver det straks mere regnetungt. Lad os dog starte med at få addition og skalarmultiplikation af matricer på plads.

Definition 1.7. Lad $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{og} \quad B \quad = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

da er *summen* $A + B$ defineret på følgende måde:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Altså skal man blot lægge indgangene sammen. Hvis $a \in \mathbb{R}$ er *skalarmultiplikationen* $a \cdot A$ defineret som

$$a \cdot A = \begin{pmatrix} a \cdot a_{11} & a \cdot a_{12} & \cdots & a \cdot a_{1n} \\ a \cdot a_{21} & a \cdot a_{22} & \cdots & a \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a \cdot a_{m1} & a \cdot a_{m2} & \cdots & a \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

altså skal man blot gange a på alle indgangene i A.

Bemærkning 1.8. Addition af to matricer er kun defineret, hvis de har samme dimensioner, dvs. samme antal rækker og samme antal søjler. Det giver altså kun mening at lægge matricerne A og B sammen, hvis de begge ligger i $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Som eksempel kunne vi tage matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 11 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

fra tidligere. Vi har

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 11 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 15 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vi har følgende resultater for matrix-addition. I skal ikke tænke for meget over begreberne i parentes. Vi kommer ikke til at bruge dem i forløbet, men det er passende, at I har set dem.

Sætning 1.9. For matricer $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gælder følgende:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (*associativitet*).

2. $A+O = A = O+A$ (O er *neutralelement* for addition).

3. $A+(-A) = O = (-A)+A$ (eksistens af *additiv invers*). Her betegner $-A$ matricen med de samme indgange i A, blot med omvendt fortegn.

4. $A + B = B + A$ (*kommutativitet*).

Bevis. Alle egenskaberne følger direkte af definitionen af matrixaddition, samt de tilsvarende egenskaber for de reelle tal. ■

Inden vi definerer multiplikation af to matricer, definerer vi et specialtilfælde, nemlig multiplikation af en matrix og en vektor.

Definition 1.10. Lad $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ og $v \in \mathbb{R}^n$ med indgange a_{ij} og x_j, hvor $i = 1, \ldots, m$ og $j = 1, \ldots, n$. Da definerer vi produktet af A og v til

$$Av = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Bemærkning 1.11. Matrix-vektorproduktet Av er kun defineret, hvis A har samme antal søjler som indgange i v. Resultatet af at gange en $m \times n$-matrix på en n-dimensional vektor er en m-dimensional vektor.

Lad os tage nogle eksempler. Vi farvelægger indgangene i vektoren, så man kan se, hvad der foregår i multiplikationen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {\color{red}1} \\ {\color{red}3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot {\color{red}1} + 2 \cdot {\color{red}3} \\ -1 \cdot {\color{red}1} + 4 \cdot {\color{red}3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Lad os tage et eksempel med en større matrix og vektor:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 10 & 0 & -1 & 4 \\ 8 & 7 & -1 & 0 \\ 7 & -9 & -2 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 5 - 1 \cdot 6 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 6 \\ 10 \cdot 2 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \\ 8 \cdot 2 + 7 \cdot 0 - 1 \cdot 5 + 0 \cdot 6 \\ 7 \cdot 2 - 9 \cdot 0 - 2 \cdot 5 + 11 \cdot 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 \\ 32 \\ 39 \\ 11 \\ 70 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Der findes en god måde at huske, hvordan man tager matrix-vektorprodukter på, såfremt man kender til prikproduktet/skalarproduktet af to vektorer. Definitionen er herunder.

Definition 1.12. Lad $v_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og $v_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Da er *prikproduktet/skalarproduktet* af v_1 og v_2 defineret som

$$
v_1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R}.
$$

Vi bemærker, at prikproduktet af to vektorer kun er defineret, hvis de to vektorer har samme antal indgange, og at prikproduktet giver et reelt tal og ikke en vektor. Nu kan vi forklare sammenhængen mellem prikproduktet og matrix-vektormultiplikation. Antag, at vi har en $m \times n$-matrix A

og en vektor v i $\mathbb{R}^n$. Lad $A_1, A_2, \ldots, A_m$ betegne rækkerne i A. Da er $A_1, A_2, \ldots, A_m$ vektorer i $\mathbb{R}^n$, og vi har

$$Av = \begin{pmatrix} A_1 \cdot v \\ A_2 \cdot v \\ \vdots \\ A_m \cdot v \end{pmatrix}.$$

Lad os nu definere matrix-matrixmultiplikation.

Definition 1.13. Lad $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ og $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Lad $B_1, B_2, \ldots, B_p$ betegne søjlerne i B. Da definerer vi produktet AB til at være $m \times p$-matricen givet ved

$$AB = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & \cdots & AB_p \end{pmatrix}.$$

I ord: AB er matricen, hvis søjler er produktet af A med søjlerne i B.

Bemærkning 1.14. Bemærk, at matrixproduktet AB er defineret hvis og kun hvis A har samme antal søjler som B har rækker.

Lad os tage en række eksempler. Betragt de to matricer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da A har tre søjler, og B har tre rækker, er AB veldefineret. Vi beregner

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} & A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 3 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 22 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vi kan også beregne produktet BA fordi antal søjler i B er lig antal rækker i A. Da fås

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

I dette eksempel kunne man tage matrixproduktet fra begge sider, men dette er ikke altid muligt. Vi kan f.eks. se på matricen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da eksisterer matrixproduktet CA, men AC giver ikke mening. Et simpelt og vigtigt eksempel på matrix-produkter er mellem kvadratiske matricer. Her kan man altid tage produktet fra begge sider, men det er ikke nødvendigvis det samme resultat, man får. Definér

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da udregner vi

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{men} \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

så $AB \neq BA$. Dette står i kontrast til, hvad vi normalt kender fra de reelle tal. Hvis $a, b \in \mathbb{R}$ gælder $ab = ba$. Lad os til slut opskrive nogle grundlæggende resultater for matrixprodukter.

Sætning 1.15. For matricer A, B og C af passende dimensioner, så produkterne er veldefinerede, har vi følgende:

1. $(AB)C = A(BC)$ (*associativitet*).
2. $AI_n = A = I_nA$ (I_n er *neutralelement* for multiplikation).

3. $A(B+C) = AB + AC$ (*distributiv lov*).

Bevis. Beviserne for punkt 1. og 3. udelades, da de er lange og involverer adskillige mindre behagelige summer. Vi refererer til [7]. Punkt 2. overlades til øvelserne. ■

2 Lineære ligningssystemer

I dette kapitel skal vi kigge på linære ligningssystemer. Lineære ligningssystemer har meget stor praktisk betydning og er af stor anvendelse i f.eks. løsningen af differentiallinger og i optimering. Derfor vil vi i dette kapitel betragte lineære ligningssystemer og hvordan disse kan løses. Vi vil også diskutere, hvornår et system af ligninger er lineært, og hvornår der findes en (eller flere) løsninger.

Definition 2.1. Vi siger at en ligning med n ubekendte er lineær hvis den har formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

hvor a_1,..a_n og b er konstante.

Vi kalder a_i for x_i's koefficient. En lineære ligning kunne eksempelvis være

$$y = ax + b.$$

Eksempler på linære ligninger kan også være

$$x_1 + 3x_2 = 7, \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$
$$\text{og} \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0.$$

Eksempler på ligninger der ikke er linære kunne være

$$\text{a) } x_1 + 3x_2^2 = 4, \quad \text{b) } 3x_1 + 2x_2 - x_1x_2 = 5,$$
$$\text{og} \quad \text{c) } \sqrt{x_1} + 2x_2 = 0.$$

a) er ikke lineær, fordi vi har x_2^2, og derfor er a) et andengradspolynomium. I b) ganger vi to ubekendte sammen, hvilket ikke er lineært. Og (c) er ikke lineær, fordi vi tager kvadratroden af x_1 og dermed opløfter x_1 i $\frac{1}{2}$.
Ofte i den anvendte matematik, især i optimering, kan vi have situationer, hvor lineære ligninger er afhængige af hinanden. Dette kalder vi et *system af lineære ligninger.*

Definition 2.2. Et system af lineære ligninger bestående af m linære ligninger med n ubekendte $x_1,\dots,x_n$ tager formen,

$$\begin{aligned} l_1 &: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ l_2 &: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ l_m &: a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{aligned}$$

Et lineært ligningssystem kan også skrives på matrixformen $Ax = b$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Vi kalder A *koefficientmatricen*. Her er vi interesseret i at finde vektoren x.

En løsning til dette system af lineære ligninger er en ordnet række tal (en vektor), $(s_1,s_2,\dots,s_n)$, som opfylder, at hvis vi sætter $x_1 = s_1,\dots,x_n = s_n$, så vil venstresiden være lig højresiden.

For eksempel kan vi finde en løsning til følgende system af to ligninger med to ubekendte:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 8. \end{aligned}$$

Når vi har et system af to ligninger med to ubekendte, kan vi løse systemet ved at isolere den ene ubekendte, og så indsætte dette udtryk i den anden ligning. Ved at isolere får vi derfor $x_1 = 5 - 2x_2$. Ved at indsætte dette i den anden ligning kan vi regne

$$\begin{aligned} 8 &= 2 \cdot (5 - 2x_2) + 3x_2 \\ \Longrightarrow 8 &= 10 - 4x_2 + 3x_2 \\ \Longrightarrow 2 &= x_2. \end{aligned}$$

Nu ved vi at $x_2 = 2$ og vi kan indsætte det i den første ligning, således vi får

$$\begin{aligned} 5 &= x_1 + 2 \cdot 2 \\ \implies x_1 &= 1. \end{aligned}$$

Derved får vi løsningen ($x_1 = 1$,$x_2 = 2$). Denne metode er dog meget ineffektiv, så snart ligningssystemerne bliver større end $m = 2$ og $n = 2$. Derfor vil vi i det følgende introducere Gauss-Jordan eliminiation. Selvom denne metode er bedre end den førnævnte (altså at finde løsningen ved at isolere), er den stadig ikke god til at løse store ligningssystemer. For en bedre metode, se Sauer, 2014. Som vi skal se senere, kan en matrix sagtens have størrelse 1000×1000, hvilket vil være uoverskueligt for et menneske at løse i hånden. Vi skal dog ikke se på større systemer end 3 ligninger med 3 ubekendte, og derfor holder vi os til Gauss-Jordan elimination. For at benytte denne metode, skal vi først kigge på *elementære rækkeoperationer*.

Definition 2.3. De følgende punkter kaldes de elementære regneoperationer.

E1) Gang en række med en ikke-nul konstant, altså erstat l_i med $a \cdot l_i$.

E2) Byt rundt på to rækker

E3) tilføj en konstant gange en række til en anden række, altså erstat l_i med $l_i + a \cdot l_j$.

Når vi bruger elementære rækkeoperationer til at løse et lineært ligningssystem, opstiller vi først *totalmatricen*. Totalmatricen er en matrix bestående af koefficientmatricen og en vektor bestående af elementerne på højre side af lighedstegnene , således den tager formen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

For eksempel har ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 3 \\ x + y &= 2, \end{aligned}$$

følgende totalmatrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Vi vil nu bruge rækkeoperationer til at *reducere* totalmatricen, så den er på *reduceret rækkeechelonform.* For at en matrix er på reduceret rækkeechelonform, skal den have følgende egenskaber:

1. Hvis en række ikke består udelukkende af nuller, så skal den første ikke-nul indgang i rækken (dvs. den længst til venstre) være et 1-tal. Dette 1-tal kaldes det *ledende 1.*

2. Hvis der er rækker bestående udelukkende af nuller, så skal de samles i bunden.

3. Hvis to efter hinanden følgende rækker ikke består udelukkende af nuller, skal rækken med det ledende 1-tal længst til venstre være øverst.

4. Hvis en kolonne indeholder et ledende 1-tal, skal alle andre indgange være nul.

Hvis matricen kun overholder de tre første punkter, er matricen på *rækkeechelonform*. Det vil sige, at alle matricer på reduceret rækkeechelonform er også på rækkeechelonform. Det vil sige, at følgende matrix er et eksempel på en matrix på reduceret rækkeechelonform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Denne totalmatrix korresponderer til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 1 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 &= 2 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

hvorfra vi nemt kan aflæse løsningen til at være (1,2,3). Nu hvor vi har elementære rækkeoperationer og kender til matricer på reduceret rækkeechelonform, er vi klar til at benytte Gauss-Jordan elimination til at løse vores lineære ligningssystem. Gauss-Jordan elimination er en algoritme, som giver os en matrix, der opfylder ovenstående betingelser.

Sætning 2.4 (Gauss-Jordans algoritme)**.**

1. Find den søjle længst til venstre, med mindst 1 ikke-nul-indgang.

2. Hvis den øverste række har en nul-indgang i den søjle, byt da rundt på rækker ved at bruge E2) således at den øverste række får en ikke-nul-indgang i den søjle.

3. Hvis denne indgang nu er en konstant $a \neq 1$ så benyt E1) til at gange hele rækken med $1/a$, så indgangen bliver 1.

4. Benyt nu E1) og E3) Indtil hele søjlen får nul-indgange undtagen den førnævnte indgang.

5. Ignorer nu den øverste linje og gentag punkt $1 - 5$.

Nu er vi færdige med *den fremadrettede fase*, og matricen er på rækkeechelonform. Vi vil imidlertid gerne have den på reduceret rækkeechelonform, og derfor udfører vi nu *den bagudrettede fase*. Her vil vi også gerne have nuller på alle ikke-diagonale indgange, som er over diagonalen. Derfor er den bagudrettede fase følgende:

1. Start med den sidste række som ikke kun består af 0-indgange, Brug nu E3) til at skabe nul-indgange i alle ikke-nul-indgangene i den søjle længst til højre, indtil at kun diagonalen har ikke-nul-indgange.

Eksempel 2.5. Lad os kigge på et eksempel og se hvordan algoritmen anvendes. Betragt systemet

$$\begin{aligned} 3x + 6y - 5z &= 0 \\ x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

med følgende totalmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Skridt 1

Vi skal i dette skridt lokalisere den søjle længst til venstre, som ikke består udelukkende af nuller. Dette er søjlen længst til venstre. Eftersom vi ikke har en nul-indgang, kan vi springe skridt 2 over.

Skridt 3

Vi kan nu skabe et 1-tal ved at gange den øverste række med 1/3. Vi kan også bytte rundt på række to og et for at få et 1-tal.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Nu ser vi at ved at addere -2 gange række 1 til række 2 bliver den første indgang i række to til et nul, hvilket er hvad vi ønsker at få. Derfor får vi,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Skridt 4

Dernæst adderer vi -3 gange den anden række og den tredje for at få

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

For at få et 1-tal i tredje indgang i tredje række ganger vi den tredje række med -2 og får

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Vi er nu færdige med den fremadrettede fase.

Skridt 5

Ved at udføre den bagudrettede fase får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Nu har vi altså en kolonne med nul på alle indgange udover det ledende 1-tal, så vi nemt kan aflæse løsningen til at være $x = 1, y = 2$ og $z = 3$. ◦

Nu har vi snakket om, hvordan vi finder en løsning. Men hvordan kan vi være sikker på at vores løsning er unik? Eller kunne vi have fundet en anden løsning? Kan vi være sikre på at en løsning overhovedet eksisterer? For at besvare disse vil vi først betragte et system af to ligninger med to ubekendte, altså

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

Tuplen (x,y), som løser dette ligningssytem, kan betragtes som skæringspunktet mellem de to linjer. Derfor er der kun følgende tre muligheder for to forskellige linjer:

1. Linjerne kan være parallelle. Hvis de er parallelle er der intet skæringspunkt og derfor ingen løsning.

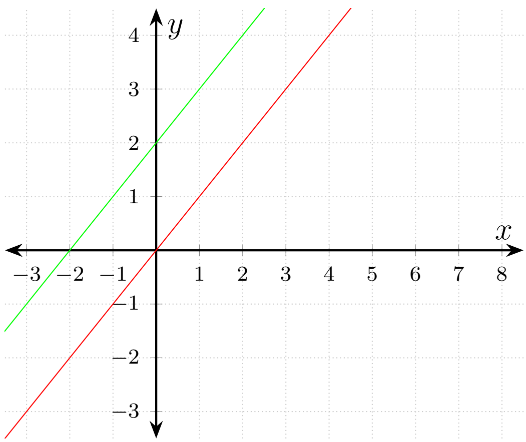
2. Linjerne skærer i et punkt og derfor vil der være en løsning.

3. Linjerne ligger oven på hinanden. I så fald vil linjerne skære i alle punkter, og derfor vil der være uendeligt mange løsninger.

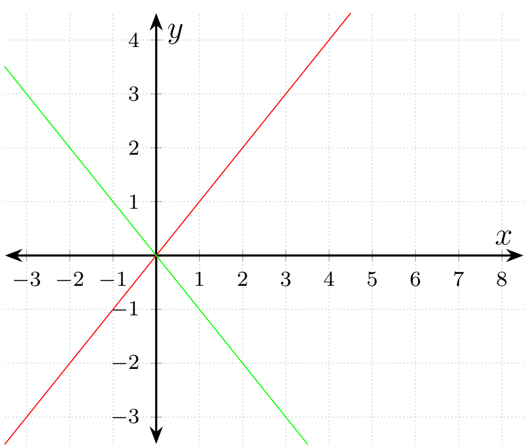
Dette giver anledning til følgende sætning for systemer med to ligninger med to ubekendte.

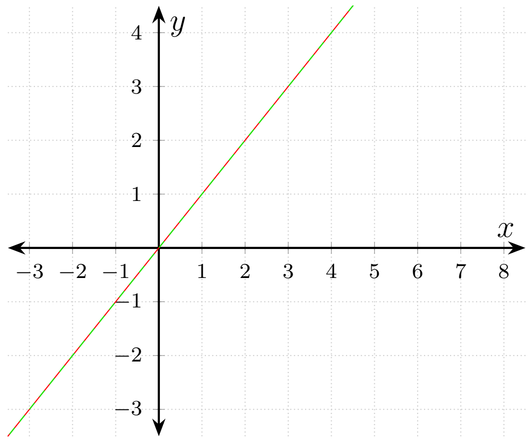
Sætning 2.6. Et system af to ligninger med to ubekendte har nul, en eller uendeligt mange løsninger. Der er ingen andre muligheder. Hvis et system har mindst en løsning, kaldes det et *konsistent system*. Hvis der ikke er nogen løsning, kaldes det et *inkonsistent system*.

Disse tre muligheder er illustreret i nedenstående figurer. I nedenstående figur har vi altså ingen løsning til et system bestående af den røde og den grønne linje, fordi de ikke skærer hinanden (de er parallele).



I følgende figur er der en løsning fordi de skærer hinanden i et punkt.





I ovenstående figur har systemet bestående af den røde og den grønne linje uendeligt mange løsninger, fordi de skærer hinanden i alle punkter.

Men hvad med et system af tre ligninger med tre ubekendte? Ligesom et system med to ubekendte kan ses om linjer i planen, kan et system af tre ligninger ses som planer i rummet. Her vil løsningerne ligeledes være skæringerne mellem planerne, som ligningerne angiver.

Sætning 2.7. Et system af tre ligninger med tre ubekendte har nul, en eller uendeligt mange løsninger. Der er ingen andre muligheder.

Bemærkning 2.8. Det kan vises at ovenstående sætning generaliseres til alle systemer af lineære ligninger. Altså vi har følgende sætning

Sætning 2.9. Alle systemer af lineære ligninger har enten nul, en eller uendeligt mange løsninger. Der er ingen andre muligheder.

Vi betragter nu følgende eksempel på et system uden løsninger. Vi viser at der ikke er nogen løsning ved at bruge de elementære rækkeoperationer og komme frem til en modstrid.

$$\begin{aligned} l_1 &: x + y = 4 \\ l_2 &: 3x + 3y = 6. \end{aligned}$$

Ved at bruge elementære rækkeoperationer kan vi fratrække -3 gange l_1 fra l_2,

$$\begin{aligned} l_1 &: x + y = 4 \\ l_2 &: 0 = -6. \end{aligned}$$

Derved får vi en modstrid, da l_2 ikke går op. Det ses også klart fra liningssystemet at l_1 og l_2 har samme hældning men forskellige skæringer med y-aksen og altså dermed parallelle.
Vi skal nu se på to eksempler af systemer med uendeligt mange systemer. Betragt systemet

$$\begin{aligned} l_1 &: 4x - 2y = 1 \\ l_2 &: 16x - 8y = 4. \end{aligned}$$

Vi kan forsimple systemet ved at gange l_2 med $-4 \cdot l_1$ og derved få systemet

$$\begin{aligned} l_1 &: 4x - 2y = 1 \\ l_2 &: 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Vi skal altså finde et par (x,y), som opfylder ligningen l_1, siden l_2 forsvinder. En måde vi kan beskrive løsningerne på, er ved at beskrive x som funktion af en parameter t, og dermed få den *parametriske ligning*

$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t, \quad y = t.$$

Eftersom at vi frit kan vælge værdien t, vil vi have uendeligt mange løsninger. Eksempler på løsninger er $(x = \frac{3}{4}, t = 1)$ og $(-\frac{1}{4}, -1)$.
Vi skal nu betragte en bestemt form for lineære ligningssystemer, nemlig *homogene systemer*.

Definition 2.10. Et system af lineære ligninger siges at være homogent, hvis det tager formen

$$\begin{aligned} l_1 &: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ l_2 &: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ &\quad\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ l_m &: a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{aligned}$$

Vi har derfor, at alle homogene systemer er konsistente, eftersom vi altid har løsningen $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, der kaldes den *trivielle løsning*. Derfor er der kun følgende to muligheder for et konsistent system

1. Systemet har én løsning.
2. Systemet har uendeligt mange løsninger.

Faktisk forholder det sig således, at et homogent system med flere ubekendte end ligninger, har altid uendeligt mange løsninger. I det næste kapitel skal vi se på inverse matricer, som kan hjælpe os med at løse problemer på formen $Ax = b$.

3 Inverse matricer

Når vi løser et system af lineære ligninger, vil vi som tidligere nævnt løse ligningen $Ax = b$. Hvis A og b havde været reelle tal, kunne vi løse ligningen ved at gange med $\frac{1}{A}$ på begge sider og få løsningen $x = \frac{b}{A}, A \neq 0$. Vi kan ikke direkte dividere med en matrix, men vi kan finde *den inverse matrix*, og hvis den eksisterer, er løsningen til systemet givet ved $x = A^{-1}b$.
Lad os først definere, hvad en invers matrix er.

Definition 3.1. Hvis $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, og hvis der findes en matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sådan at $AB = BA = I$, så kaldes A for en *invertibel matrix* og B er den *inverse* af A.

Hvis A er en invertibel matrix så angiver vi A's inverse som A^{-1}. Lad os tage et eksempel på, hvordan man kan tjekke om, A er den inverse matrix til B. Betragt følgende matricer.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi skal altså tjekke om $AB = BA = I$. Ved at bruge matrix-regnereglerne

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Altså har vi at $B = A^{-1}$. Vi kan altså nemt tjekke om en matrix A er den inverse til B, men hvordan finder vi den inverse matrix? For at besvare det spørgsmål, vil vi først betragte det mest simple tilfælde, nemlig en 2×2 matrix. Den inverse matrix for en 2×2 matrix kan regnes ved at bruge følgende sætning.

Sætning 3.2. Matricen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

er invertibel hvis og kun hvis $ad - bc \neq 0$. Hvis det forholder sig således, da er den inverse givet ved

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Vi betegner $ad - bc$ som *determinanten* og skriver det som $det(A)$. Lad os først regne et eksempel.
Lad

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da regner vi først $det(A) = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 7$. Altså er A invertibel og derfor regner vi A^{-1}, således,

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{-5}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix},$$

hvorfor vi ville kunne løse et system $Ax = b$ ved at gange med den inverse fra venstre side og få løsningen $x = A^{-1}b$. Det skal bemærkes, at determinanten også kan defineres for alle $n \times n$-matricer. Dette udelader vi dog, da det er svært for matricer større end 2×2. Generelt har vi følgende metasætning:

Sætning 3.3. For enhver matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ med determinant $det(A) \neq 0$ findes der en eksplicit løsning for at regne A^{-1} hvis og kun hvis $n = 2$.

Det vil altså sige at for matricer $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, n \neq 2$ har vi ikke nogen lukket løsning. Heldigvis har vi følgende algoritme som giver os den inverse matrix til enhver invertibel matrix.

Sætning 3.4 (Inversionsalgoritmen)**.** For at finde den inverse af en invertibel matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kan man finde en sekvens af rækkeoperationer, som reducerer A til identitetsmaticen. Herefter kan man udføre samme sekvens af rækkeoperationer på I_n. Resultatet heraf vil være A^{-1}. Hvis A ikke kan reduceres til identitetsmatricen er A ikke invertibel.

Eksempel 3.5. Lad os kigge på et eksempel på denne algoritme ved at betragte matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

For at vi kun skal udføre operationerne en gang tilføjer vi identitetsmatricen på højresiden af A således vi får $[A|I]$, givet som

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Vi vil nu benytte de elementære rækkeoperationer, så vi får identitetsmatricen på højresiden. Vi udfører altså rækkeoperationer så vi får følgende sekvens af matricer:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Derfor har vi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

∘

Nu har vi set hvordan vi kan bruge inversionsalgoritmen til at finde den inverse matrix, men vi kan faktisk også bruge den til at vise, at om inverse eksisterer. For at bruge algoritmen til at vise eksistens, skal vi bruge følgende sætning,

Sætning 3.6. Hvis A er en $n \times n$ matrix, så er følgende udsagn ækvivalente – det vil sige, at alle er sande eller alle er falske.

1. A er invertibel.

2. $Ax = 0$ har kun den trivielle løsning.

3. Den reducerede rækkechelonform er identitetsmatricen I_n.

4. $det(A) \neq 0$.

5. $Ax = b$ har præcis en løsning for hver $n \times 1$ matrix b, nemlig $x = A^{-1}b$.

Lad os se på et eksempel på denne sætning.

Eksempel 3.7. Lad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Da kan vi opstille totalmatricen ved at tilføje en identitesmatrix til maticen A således vi får $[A|I]$, altså

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

For at finde den inverse vil vi nu udføre en række rækkeoperationer indtil vi har formen $[I|A^{-1}]$, jævnfor Inversionsalgoritmen.
Først tilføjer vi -2 gange række 1 til række 2 og 1 gange række 1 til række 3 og får,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Nu kan vi tilføje den anden række til den tredje og vi får

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Vi har nu en række med 0 i alle indgange, og derfor er matricen A ikke invertibel, jævnfør punkt 3 i sætning 3.6. Altså, man kan tjekke om en af punkterne i sætning 3.6 holder, for at tjekke eksistens. ◦

En anvendelse: Numeriske løsninger til differentialligninger

Som tidligere nævnt kan man anvende lineær algebra til at løse differentialligninger. Kort sagt er en differentialligning en ligning, hvor man beskriver, hvordan funktioner ændrer sig i forhold til en given parameter. Nogle gange findes der en formel for at løse den, andre gange gør der ikke. Hvis det ikke er tilfældet kan vi tilnærme os en løsning ved at bruge numerisk analyse. Her er de mest populære metoder Finite Difference og Monte Carlo metoder. Hvis differentiallingen har 2 eller færre parametre, så er finite difference bedre (altså kræver mindre computerkraft), hvorimod Monte Carlo metoder er bedst, hvis der flere end 2 parametre. Monte Carlo metoder bygger på tilfældighed, hvor fra den er opkaldt efter det kendte kasino i Monte Carlo. Finite Difference bygger derimod på lineær algebra, og derfor vil vi kigge nærmere på dem i dette afsnit.

Som et eksempel på hvordan Finite Differences bruges, vil vi i dette afsnit betragte varmeligningen, og se hvordan lineær algebra kan give en approksimativ løsning. I tilfælde hvor der ikke er en lukket løsning, vil en approksimation være vores eneste mulighed for et bud på en løsning. Dette ses f.eks. når man vil værdisætte Amerikanske optioner eller såkaldte exchange optioner med ikke-nul strike.

En fordel ved at betragte varmeligningen er at den har en lukket løsning, så vi kan sammenligne, hvor god vores approksimation er, med den analytiske løsning.

Varmeligningen repræsenterer hvordan temperaturen i et givet stykke materiale (nærmere bestemt en stang af et materiale), spreder sig fra områder med høj varme til områder med lav varme ved et givent tidspunkt t.

Varmeligningen tager formen

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

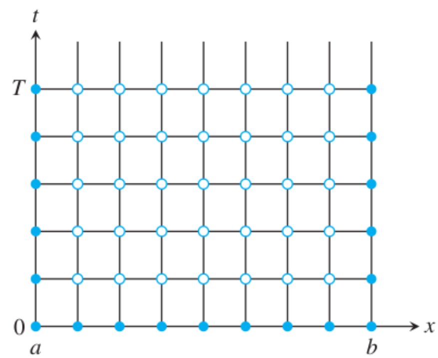
hvor $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ kaldes den afledte i forhold til tiden t og beskriver hvordan u ændrer sig når t ændrer sig. Ligeså kaldes $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ den andenafledte i forhold til x og beskriver hvordan ændringen ændre sig når x ændre sig. $D > 0$ kaldes diffusionskoefficienten, og er specifik i forhold til det givne stykke materiale.

Der er uendeligt mange løsninger til denne ligning, og derfor bliver vi nødt til at specificere nogle grænsebetingelser. Grænsebetingelserne beskriver hvordan funktionen opfører sig i hver ende af stangen, og hvor varm den er nu ($t = 0$). Vi har derfor følgende

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \text{ for all } a \leq x \leq b, t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) \text{ for all } a \leq x \leq b, \\ u(a,t) = l(t) \text{ for all } 0 \leq t \leq T, \\ u(b,t) = r(t) \text{ for all } 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

$l(t)$ og $r(t)$ angiver temperaturen i hver ende af stangen til tidspunktet t.

For at løse ligningen numerisk vil vi diskretisere stangen med M skridt i rum og N skridt i tid, og dermed får vi en skridtstørrelse i henholdsvis rum og tid på $h = (b-a)/M$og $k = T/N$. Det diskrete gitter vi løser ligningen på er vist i figur 2.1.



Figur 2.1: De fyldte punkter er grænsebetingelser vi kender, og de tomme punkter er de steder, hvor vi tilnærmer os en løsning. Kilde: Sauer,2014.

Navnet "Finite Difference" kommer af at man udvælger punkter, hvori man regner forskellen af funktionsværdierne. Ved at bruge disse metoder får vi følgende approksimation for den anden-afledte i rum

$$u_{xx}(x,t) \approx \frac{1}{h^2}\left(u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)\right),$$

og følgende for den afledte i tid,

$$u_t(x,t) \approx \frac{1}{k}\left(u(x,t+k) - u(x,t)\right).$$

Ved at indsætte dette i varmeligningen i punktet (x_i,t_j) får vi

$$\begin{aligned} D \cdot \frac{1}{h^2}\left(w(x+h,t) - 2u(x,t) + w(x-h,t)\right) \\ = \frac{1}{k}\left(w(x,t+k) - w(x,t)\right). \end{aligned}$$

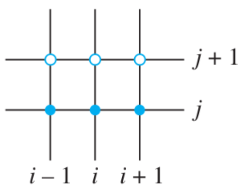
I det følgende vil vi ændre notation for at øge læseligheden, så vi nu har, at

$$D \cdot \frac{1}{h^2}\left(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}\right) = \frac{1}{k}\left(w_{i,j+1} - w_{i,j}\right).$$

Vi kan nu omskrive ovenstående og isolere $w_{i,j+1}$, sådan at vi får

$$\begin{aligned} w_{i,j+1} &= w_{i,j} + \frac{Dk}{h^2}(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}) \\ &= \sigma w_{i+1,j} + (1-2\sigma)w_{i,j} + w_{i-1,j}, \end{aligned}$$

med $\sigma = \frac{Dk}{h^2}$. Vi har her isoleret for $w_{i+1,j}$, fordi det er den eneste ukendte, som vist på nedenstående figur.



Figur 2.2: Her vises visuelt, hvilke værdier vi approximerer i næste skridt (de tomme) på baggrund af allerede kendte/approximerede værdier (de udfyldte).

Ligningen kan omskrives til matrixform, så det tager formen $w_{j+1} = Aw_j + s_j$, hvor w_{j+1},w_j, og s_j er vektorer, og A er en (tridiagonal) $(M-1)\times(M-1)$ matrix, således at vi har systemet

$$\begin{pmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j+1} \\ w_{m,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\sigma & \sigma & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \sigma \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma & 1-2\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \\ w_{m,j} \end{pmatrix}$$

$$+\,\sigma \begin{pmatrix} w_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{m+1,j} \end{pmatrix}$$

Der findes dog mere avancerede metoder, end de her viste, som vi vil kigge på nu. En af disse metoder er Crank-Nicolson metoden, der ligeledes bygger på en diskretisering af ligningen, men er en smule mere besværlig at implementere. Det er klart besværet værd, fordi Crank-Nicolson er ubetinget stabil og konvergerer hurtigere (det vil sige, at vi kommer hurtigere tæt på det rigtige resultat) end førnævnte metode, og dermed behøver vi mindre computerkraft.
Vi får altså, at vi kan approximere $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ ved

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{1}{k}(w_{i,j} - w_{i,j-1}),$$

og $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ kan approximeres ved

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx & \frac{1}{2}\left(\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2}\right) \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j-1}}{h^2}\right).\end{aligned}$$

Ved at indsætte $\sigma = \frac{Dk}{h^2}$ og omskrive ligesom før kan vi opstille ovenstående ligning på formen

$$Aw_j = Bw_{j-1} + \sigma(s_{j-1} + s_j),$$

med

$$A = \begin{pmatrix} 2+2\sigma & -\sigma & 0 & \dots & 0 \\ -\sigma & 2+2\sigma & -\sigma & \ddots & \vdots \\ 0 & -\sigma & 2+2\sigma & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\sigma \\ 0 & \dots & 0 & -\sigma & 2+\sigma \end{pmatrix},$$

og

$$B = \begin{pmatrix} 2-2\sigma & \sigma & 0 & \dots & 0 \\ \sigma & 2-2\sigma & \sigma & \ddots & \vdots \\ 0 & \sigma & 2-2\sigma & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \sigma \\ 0 & \dots & 0 & \sigma & 2-2\sigma. \end{pmatrix}$$

For at løse dette system (altså isolere $w_{i,j}$) ganger vi med den inverse af A, altså vi har løsningen

$$w_j = A^{-1}\left(Bw_{j-1} + \sigma(s_{j-1} + s_j)\right),$$

Under antagelsen af at den inverse matrix eksiterer. Vi vil ikke gå mere i dybden med hvornår det er tilfældet her, se eventuelt Sauer, 2014. For at illustrere korrektheden af en numerisk løsning har vi følgende eksempel, hvor vi betragter følgende

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \text{ for all } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1, \\ u(x,0) = e^{-x/2} \text{ for all } a \leq x \leq b, \\ u(a,t) = e^{t} \text{ for all } 0 \leq t \leq T, \\ u(b,t) = e^{t-1/2} \text{ for all } 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

I tabellen nedenunder sammenligner vi den analytiske løsning med den approksimerede løsning, hvor det tydeligt ses, at vi nærmer os det korrekte resultat relativt hurtigt.

h	k	u(0.5,1)	w(0.5,1)	Fejl
0.1	0.1	2.11700002	2.11706765	0.00006763
0.05	0.05	2.11700002	2.11701689	0.000001687
0.01	0.01	2.11700002	2.11700069	0.00000067

4 Diagonalisering

Diagonalisering er en særdeles praktisk metode i lineær algebra til udregninger. Rigtig ofte er vi interesserede i at beregne potenser af en matrix A. Men som I nok har erfaret, er det langsommeligt at beregne matrix-produkter. Selv for en computer er det en langsommelig proces, specielt hvis man har en forholdsvis stor matrix, og potensen er meget høj. Dog er der en type matrix, der ikke er svær at udregne potenser af, nemlig *diagonalmatricer*. Dette er matricer på formen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}. \end{pmatrix}.$$

Her er det nemt at beregne A^k, idet

$$A^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^k \end{pmatrix}$$

og potenser af tal er hurtige at beregne, i hvert fald for en computer. Kunne det ikke være rart, hvis vi kunne tage en matrix og skrive den på en form, hvor der indgår en diagonalmatrix? Det er dette, diagonalisering handler om. For at fastlægge en metode er vi dog nødt til at tage nogle omveje. Vi starter med at definere egenværdier og egenvektorer.

Definition 4.1. $\lambda \in \mathbb{R}$ kaldes en *egenværdi* for matricen A og $v \neq 0$ en *egenvektor* for λ, hvis der gælder

$$Av = \lambda v.$$

En egenvektor er en vektor, som matricen A blot skalerer. Skaleringsfaktoren er den tilhørende egenværdi. Inden vi giver eksempler, så lad os se på ligningen

$$Av = \lambda v.$$

Vi ved, at $v = I_n v$. Dermed kan vi skrive

$$0 = Av - \lambda I_n v = (A - \lambda I_n)v.$$

Det er klart, at $v = 0$ er en løsning, men i definitionen ovenover har vi udeladt dette tilfælde. Dette skyldes, at definitionen er tom/uinteressant, hvis vi tillader 0 at være en egenvektor. Med andre ord antager vi, at $v \neq 0$. Vi har nu et homogent lineært ligningssystem

$$(A - \lambda I_n)v = 0,$$

og vi ved, hvordan vi skal løse sådan et. Bemærk, at $A - \lambda I_n$ ikke kan være invertibel. Hvis $(A - \lambda I_n)^{-1}$ eksisterer, kan vi gange begge sider af ovenstående ligning og få $v = 0$, hvilket ikke er tilfældet. Fra forrige afsnit ved vi da, at determinanten af $A - \lambda I_n$ skal være 0. Dette leder os til følgende definition.

Definition 4.2. For en matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ defineres det *karakteristiske polynomium* til at være

$$p(t) = \det(A - tI_n).$$

Fra definitionen og diskussionen ovenover har vi følgende resultat.

Sætning 4.3. λ er en egenværdi for matricen A hvis og kun hvis λ er en rod i det karakteristiske polynomium $p(t)$ for A (dvs. hvis $p(\lambda) = 0$).

Lad os tage et eksempel. Betragt matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium er

$$\begin{aligned}p(t) = \det(A - tI_2) &= \det\begin{pmatrix} 2-t & 0 \\ -1 & 1-t \end{pmatrix} \\ &= (2-t)(1-t) - (-1)\cdot 0 = (2-t)(1-t).\end{aligned}$$

Rødderne ses at være $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 1$. Lad os nu bestemme egenvektorerne. Vi skal finde egenvektorer for de to egenværdier for sig, og vi begynder med λ_1 ($\rightarrow$ betyder her, at vi omskriver matricen til reduceret rækkeechelonform):

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi løser nu

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix}$$

og vi ser, at $x = -y$. Vælger vi $x = 1$, har vi egenvektoren $(1, -1)$ hørende til λ_1. Vi gentager nu proceduren for λ_2:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi løser

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

og får $x = 0$. y kan være hvad som helst, så vi vælger $y = 1$. Dermed er $(0, 1)$ en egenvektor til λ_2. For at konkludere, så har vi fundet egenværdierne 2 og 1 med tilhørende egenvektorer $(1, -1)$ og $(0, 1)$. Vi kan verificere dette:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En sidste bemærkning, inden vi fortsætter. I ovenstående da vi løste vores ligningssystemer, traf vi bare et valg. F.eks. sagde vi, at vi valgte $x = 1$. Som den vakse læser nok har opdaget, så var der uendelig mange løsninger i begge tilfælde. Disse andre løsninger svarer blot til skaleringer af vores valgte egenvektor. Generelt, hvis v er en egenvektor for matricen A, da er $a \cdot v$ også en egenvektor for A for alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Lad os tage endnu et eksempel med en lidt større matrix. Lad

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi beregner det karakteristiske polynomium:

$$\begin{aligned}
p(t) = \det(A - tI_3) &= \det \begin{pmatrix} 0-t & -1 & -1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 1 & 1 & 2-t \end{pmatrix} \\
&= -t \cdot \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix} \\
&+ 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2-t & 1 \end{pmatrix} \\
&= -t((2-t)^2 - 1) - ((-1)(2-t) - 1(-1)) \\
&+ (-1)1 - (2-t)(-1) \\
&= -t(2-t)^2 + t + (2-t) - 1 - 1 + (2-t) \\
&= -t(2-t)^2 + (2-t) + (2-t) - (2-t) \\
&= -t(2-t)^2 + (2-t) \\
&= (2-t)(-t(2-t) + 1) \\
&= (2-t)(t^2 + 1 - 2t) \\
&= -(t-1)^2(t-2)
\end{aligned}$$

Vi ser, at rødderne er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$. Vi bemærker desuden, at λ_1 er en dobbeltrod, idet faktoren $(t-1)$ i polynomiet er sat i anden potens. Vi bestemmer nu egenvektorerne. Vi starter med λ_1:

$$\begin{pmatrix} 0-\lambda_1 & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi løser nu ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

hvilket giver $x+y+z=0$, så der er to frie variable. Vælg $y=0$, da er $x=-z$, og vi får en løsning givet ved vektoren $v_1=(1,0,-1)$. Vælges $z=0$ fås en løsning til $v_2=(1,-1,0)$. Her benytter vi et smart trick. Antal egenvektorer til en given egenværdi λ kan maksimalt være lig potensen af faktoren $(t-\lambda)$ i det karakteristiske polynomium. Dermed kan vi ikke finde nye egenvektorer til λ_1, som ikke kan skrives som en linearkombination af v_1 og v_2. Vi finder nu egenvektorer til λ_2. Vi har

$$\begin{pmatrix} 0-\lambda_2 & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og dermed ligningssystemet

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+z\\y-z\\0\end{pmatrix}.$$

Vi har da $x + z = 0$ og $y - z = 0$. Altså er $y = z = -x$, og vælger vi $x = 1$, får vi løsningen $v_3 = (1, -1, -1)$. For at opsummere, vi har fundet egenværdierne $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$. Til den første egenværdi har vi de to egenvektorer $v_1 = (1, 0, -1)$ og $v_2 = (1, -1, 0)$, mens den anden egenværdi har egenvektoren $v_3 = (1, -1, -1)$. Lad os opsummere nogle smarte tricks, vi har benyttet i følgende sætning.

Sætning 4.4. Lad $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Da gælder:

1. A kan maksimalt have n forskellige egenværdier.

2. A kan maksimalt have n forskellige egenvektorer.

3. En given egenværdi λ for A kan maksimalt have lige så mange tilhørende egenvektorer som potensen af $(t-\lambda)$ i det karakteristiske polynomium.

Bevis. Første punkt følger af algebraens fundamentalsætning, som siger, at et polynomium af grad n maksimalt kan have n forskellige rødder. Resten af beviset udelades. Det andet punkt er sætning 5.1.8 i [7], og punkt tre er sætning 5.3.7 i [7]. ■

Vi har nu fået en fornemmelse for egenværdier og egenvektorer, og vi ved, hvordan de udregnes. Vi kan nu vende tilbage til formålet med denne sektion, nemlig diagonalisering.

Definition 4.5. En matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kaldes *diagonaliserbar*, hvis der eksisterer en *diagonalmatrix* $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ og en invertibel matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, så $A = BDB^{-1}$.

Antag, at A er diagonaliserbar, og at vi ønsker at bestemme A^k for en potens $k \in \mathbb{N}$. Skriv $A = BDB^{-1}$ med matricer B og D som i definitionen ovenover. Da har vi

$$\begin{aligned} A^k &= (BDB^{-1})(BDB^{-1})\cdots(BDB^{-1}) \\ &= BD(B^{-1}B)D(B^{-1}B)D\cdots(B^{-1}B)DB^{-1} \\ &= BD^kB^{-1}, \end{aligned}$$

så vi har reduceret et problem med at lave k matrixmultiplikationer til et problem, hvor vi skal lave to. Dette er langt mere effektivt i praksis. Vi mangler blot at redegøre for fremgangsmåden til at bestemme B. Følgende sætning giver svaret:

Sætning 4.6. Antag, at $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ har egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (ikke nødvendigvis forskellige) med tilhørende egenvektorer $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (hvoraf nogle kan tilhøre samme egenværdier). Med

$$B = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

er $A = BDB^{-1}$.

Bevis. Lad os beregne AB med B givet som i sætningen:

$$\begin{aligned} AB &= A\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots \lambda_n v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= BD \end{aligned}$$

Såfremt egenvektorerne vælges på passende vis (vi kommer ikke ind på detaljerne her i forløbet), er B invertibel. Ganger vi med B^{-1} på højre side på hver side af lighedstegnet, får vi $A = BDB^{-1}$ som ønsket. ■

Vi har nu en komplet procedure til at diagonalisere. Vi har en matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Fremgangsmåden er nu:

1. Beregn egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ for A. Husk, at de ikke behøver at være forskellige.
2. Bestem egenvektorerne for A, $v_1, v_2, \dots, v_m$.
3. Hvis der ikke er n forskellige egenvektorer, kan vi ikke diagonalisere A, og processen stopper.
4. Lad $B = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$, og lad D være diagonalmatricen med egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ som indgange i diagonalen.
5. Diagonaliseringen af A er $A = BDB^{-1}$.

Lad os tage et eksempel på denne fremgangsmåde. Vi bruger matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

fra før. Vi fandt egenværdierne $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 1$ med tilhørende egenvektorer $(1, -1)$ og $(0, 1)$. Da har vi

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lad os verificere, at $A = BDB^{-1}$:

$$\begin{aligned} BDB^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

Bemærk, at rækkefølgen af egenværdierne i diagonalen i D skal stemme overens med rækkefølgen af egenvektorerne i B. Det skal forstås sådan, at hvis λ vælges til at være egenværdi nummer 1, skal en tilhørende egenvektor udgøre den første søjle i B. Lad os for fuldstændighedens skyld tage det andet eksempel med matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

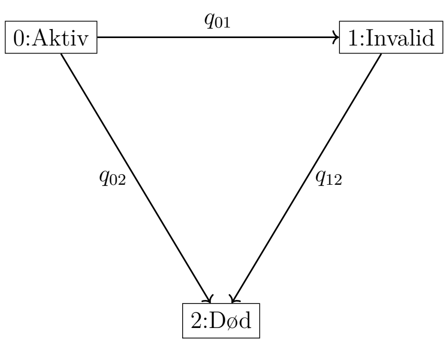
Da er

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Det overlades til den ivrige læser at verificere dette ved at tage de to matrix-produkter. Inden vi afslutter forløbet med en anvendelse, skal vi nævne, at den fulde historie bag egenværdier, egenvektorer og diagonalisering kan findes i [7] og [8]. Sidstnævnte har en mere pædagogisk gennemgang i forhold til det teoretiske aspekt af lineær algebra og kan klart anbefales til enhver, der ønsker en god forståelse for feltet.

En anvendelse: Markovkæder og livsforsikring

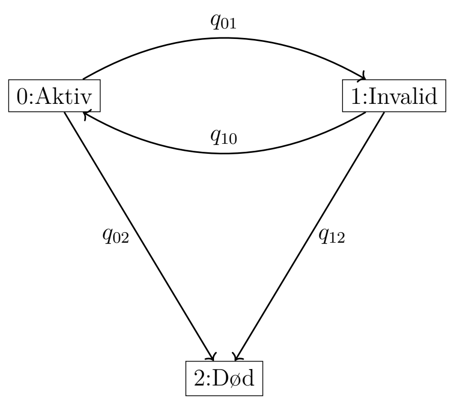
I dette afsnit giver vi en meget kort og overordnet introduktion til Markovkæder og deres anvendelse i livsforsikring. En Markovkæde er formelt set en stokastisk proces, men vi skal kun tænke på den intuitivt. En Markovkæde skal forstås som en række spring på et tilstandsrum. F.eks. kunne vi betragte følgende model:



De tre tilstande hedder henholdsvis 0, 1 og 2. Teksten i boksen beskriver, hvordan tilstanden skal fortolkes. I livsforsikring starter man med at være i live og aktiv. Mens man er aktiv, indbetaler man penge til forsikringsselskabet. I løbet af ens liv kan der ske to ting (i hvertfald hvis man tillader en vis forsimpling af den menneskelige tilværelse), nemlig at man kan blive invalid, eller man kan dø. Man kan dø både som aktiv og invalid, men når først man er død, kan man ikke gå tilbage til at være aktiv eller invalid. Det er dog ikke oplagt, om man kan gå fra at være invalid til aktiv. Vi venter lidt med at diskutere dette.

Tallene q_{01}, q_{02} og q_{12} kaldes *intensiteter* og kan være konstante eller tidsafhængige (det giver i hvert fald mening, at risikoen for at dø eller blive invalid vokser med alderen). Vi antager dog, at de er tidsuafhængige for simpelhedens skyld. Fortolkningen af dem er som følger: Hvis dt betegner et meget lille (infinitesimalt) tidsrum, da er $q_{ij}dt$ approksimativt sandsynligheden for, at du går fra tilstand i til j i et tidsrum af længde dt, hvis du er i tilstand i til at starte med. Måler vi tiden i år, er $q_{02}dt$ f.eks. sandsynligheden for, at du dør inden for dt år, givet at du er aktiv lige nu.

Det er naturligvis i forsikringsselskabets interesse at beregne sandsynlighederne for overgang mellem tilstandene. Vi betegner disse $p_{ij}(t)$. $p_{ij}(t)$ er sandsynligheden for at være i tilstand j efter t tidsenheder givet, at man er i tilstand i på et tidspunkt inden. Lad os tage et eksempel. Hvis man er 20 år gammel og aktiv, er sandsynligheden for at være invalid som 50-årig lig $p_{01}(30)$. Det viser sig, at man kan opskrive løsninger for overgangssandsynlighederne i vores simple model ovenover. Tillader man en reaktiveringsintensitet $q_{10} \neq 0$, kan man ikke opskrive en løsning. Modellen bliver simpelthen for kompliceret! Ikke desto mindre kan vi beregne sandsynlighederne med en computer ved at bruge lineær algebra. Vores model er altså:



Vi er interesseret i at beregne matricen af overgangssandsynligheder:

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{20}(t) & p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix}$$

givet matricen af overgangsintensiteter:

$$Q = \begin{pmatrix} -q_{01} - q_{02} & q_{01} & q_{02} \\ q_{10} & -q_{10} - q_{12} & q_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Af tekniske årsager skal summen af hver række være nul, og derfor ser diagonal-elementerne ud, som de gør. For at beregne $P(t)$ har vi brug for endnu et værktøj. Nogle af jer kender sikkert til eksponentialfunktionen exp givet ved $\exp(x) = e^x$, hvor e er Eulers tal. Det viser sig, at

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Her er $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ for et naturligt tal n. Dette giver følgende definition:

Definition 4.7. For en matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definerer vi *eksponentialmatricen* til

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Det viser sig, at ovenstående definition giver mening, og at $\exp(A)$ er en $n \times n$-matrix uanset matricen A. Følgende sætning viser, hvordan eksponentialmatricen relaterer sig til overgangssandsynligheder.

Sætning 4.8. Antag, at vi har en Markovkæde i kontinuert tid på et endeligt tilstandsrum med n tilstande med intensitetsmatrix Q uafhængig af t. Da er

$$P(t) = \exp(tQ)$$

under betingelsen, at $P(0) = I_n$.

Vi er næsten parat til at beregne overgangssandsynligheder. Lad os først overveje, om betingelsen $P(0) = I_3$ er opfyldt for vores model. $p_{00}(0)$ er sandsynligheden for, at man er aktiv, hvis man er aktiv på et tidligere tidspunkt. Men $t = 0$ er det tidligste tidspunkt, og derfor må $p_{00}(0) = 1$. På samme vis ses, at $p_{11}(0) = p_{22}(0) = 1$, og derfor har vi $P(0) = I_3$. Nu skal vi beregne $P(t)$, og her kommer diagonalisering ind i billedet. I princippet kræver udregningen af $\exp(A)$, at man beregner vilkårligt store potenser af A, hvilket er ekstremt regnetungt, hvis man ønsker en høj præcision. Følgende sætning viser, at når A er diagonaliserbar, er det markant lettere at beregne eksponentialmatricen.

Sætning 4.9. Antag, at $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ er diagonaliserbar med $A = BDB^{-1}$, hvor D er en diagonalmatrix med indgange $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Da er

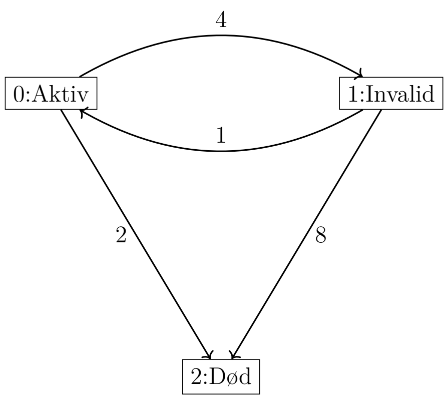
$$\exp(A) = B \begin{pmatrix} e^{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{d_n} \end{pmatrix} B^{-1}$$

Bevis. Beviset er en direkte udregning:

$$\begin{aligned}
\exp(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} B\frac{D^k}{k!}B^{-1} \\
&= B\left(\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{d_1^k}{k!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{d_2^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{d_n^k}{k!} \end{pmatrix}\right) B^{-1} \\
&= B \begin{pmatrix} e^{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{d_n} \end{pmatrix} B^{-1}.
\end{aligned}$$

■

Vi er nu klar til at udregne nogle overgangssandsynligheder. Lad os tage et forholdsvis simpelt eksempel på overgangsintensiteter:



Vi har da, at

$$Q = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 1 & -9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En masse beregninger viser, at egenværdierne for Q er -10, -5 og 0. De tre egenværdier har egenvektorer henholdsvis $(-1, 1, 4)$, $(4, 1, 0)$ og $(1, 1, 1)$. Dermed bliver diagonaliseringen af Qt

$$Qt = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10t & 0 & 0 \\ 0 & -5t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

og Sætning 4.8 og 4.9 giver, at

$$
\begin{aligned}
P(t) &= \exp(Qt) \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-10t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{e^{-10t}}{5} + \frac{4e^{-5t}}{5} & -\frac{4e^{-10t}}{5} + \frac{4e^{-5t}}{5} & 1 + \frac{3e^{-10t}}{5} - \frac{8e^{-5t}}{5} \\ -\frac{e^{-10t}}{5} + \frac{e^{-5t}}{5} & \frac{4e^{-10t}}{5} + \frac{e^{-5t}}{5} & 1 - \frac{3e^{-10t}}{5} - \frac{2e^{-5t}}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Denne model viser sig dog at være meget ringe til dens formål. For $t = 30$ f.eks. er alle sandsynligheder i sidste søjle stort set 1, mens alle andre er 0. I virkeligheden anvendes nogle intensiteter, der er aldersafhængige. For 50 år ser Q således ud:

$$
Q = \begin{pmatrix} -0.01039 & 0.00387 & 0.00653 \\ 0.00578 & -0.01883 & 0.01305 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

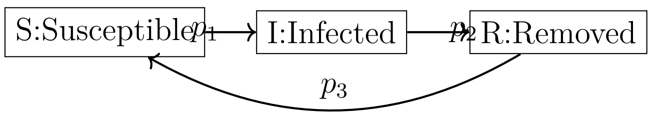
Indsætter vi naivt dette Q i $\exp(Q \cdot 50)$ fås

$$
P(50) = \begin{pmatrix} 0.60940 & 0.094770 & 0.29621 \\ 0.14154 & 0.40272 & 0.45578 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

som virker mere realistisk.

En anvendelse: Smittespredning

Vi skal nu se på et eksempel på hvordan man kan bruge lineær algebra til at beskrive smitteudvikling ved at bruge SIRS-modellen. S,I og R står for Susceptible, Infected og Removed/recovered. Det sidste S i SIRS betyder at man kan gå tilbage fra at være recovered til at være modtagelig igen. Modellen er vist nedenfor. Pilene i modellen indikerer, fra hvilke stadier man kan bevæge sig i mellem.



Egentlig er SIRS-modellen en deterministisk model, hvilket betyder at vi får det samme resultat hver gang. Vi kan imidlertid omskrive modellen til en stokastisk model, hvilket betyder at vi tilføjer et element af tilfældighed. Dvs. det kun er med en hvis sandsynlighed at naboen bliver smittet.

I modellen betragter vi en homogen befolkning, hvor alle mennesker til hvert tidspunkt har samme naboer. En homogen betydning betyder, at alle er lige modtagelige for smitte, ingen ind- og udvandring osv, hvilket er stærkt forsimplet, men gør modellen meget simpel at simulere.

I den stokastiske model benytter vi os af en Markovkæde hvor hvert led i kæden beskriver smittetilstanden i befolkningen til det tidspunkt. For at beskrive hvor hurtigt sygdommen udvikler sig, benytter vi os af overgangssandsynligheder, hvor disse sandsynligheder beskriver, hvad sandsynligheden er for at et individ går fra en tilstand (enten S,I eller R) til en anden efter hvert tidsskridt.

5 Opgaver

Vektorer, matricer og regneoperationer

- **Opgave 5.1:**
Lad

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1) Beregn $v_1 + v_2$ og $v_1 - v_2$.

2) Tegn $v_1, v_2, v_1 + v_2$ og $v_1 - v_2$ ind i et plan.

- **Opgave 5.2:**
Lad $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{4\times 5}, C \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ og $v \in \mathbb{R}^2, w \in \mathbb{R}^4$. Hvilke af følgende udtryk er veldefinerede?

1) Av

2) Aw

3) Bv

4) Bw

5) Cv

6) Cw

- **Opgave 5.3:**
Lad

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix},$$
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Beregn Av_1, Av_2, Bv_1 og Bv_2.

• **Opgave 5.4:**

Beregn Av for:

1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

•• **Opgave 5.5: Skaleringsmatricer**

Lad $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ være givet ved

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

Sådan en matrix kaldes en *skaleringsmatrix*. Vi ser på tilfældet $n = 2$ og definerer

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lad $v = (1, 1)$.

1) Beregn Av og Bv.

2) Tegn v, Av og Bv i et koordinatsystem. Forklar, hvad matricerne A og B gør.

●●● **Opgave 5.6: Rotationsmatricer**

Lad $R(\theta) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ være givet ved

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta). \end{pmatrix}.$$

Sådan en matrix kaldes en *rotationsmatrix*.

1) Lad $e_1 = (1, 0)$ og $e_2 = (0, 1)$. Beregn $R(\theta)e_1$ og $R(\theta)e_2$. Tegn $e_1, e_2, R(\theta)e_1$ og $R(\theta)e_2$ i et koordinatsystem.

2) Lad nu $v = (x_1, x_2)$ være en generel vektor. Forklar, hvad $R(\theta)$ gør ved vektoren v. Det er en rigtig god idé at lave en illustration.

● **Opgave 5.7:**

Lad $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 5}$ og $C \in \mathbb{R}^{5\times 2}$. Hvilke af følgende udtryk er veldefinerede?

1) AB

2) BA

3) BC

4) CB

5) $BC + A$

6) $CB + A$

7) $AB + C$

8) ABC

9) CAB

●● **Opgave 5.8:**

Beregn AB for:

1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

●● **Opgave 5.9:**
Beregn AB for:

1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 8 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

●●● Opgave 5.10: Prikproduktet

I denne opgave skal vi undersøge prikproduktet lidt nærmere.

1) Udregn prikprodukterne af følgende vektorer med hinanden (i alt seks prikprodukter):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vi siger, at to vektorer er *ortogonale*, hvis deres prikprodukt er 0.

2) Hvilke af ovenstående vektorer er ortogonale med hinanden?

3) Tegn v_1, v_2, v_3 og v_4 i et koordinatsystem. Hvad betyder det geometrisk, at vektorer er ortogonale?

4) Lad nu $v = (x_1, x_2)$ være en vilkårlig vektor. Da defineres *tværvektoren* $\hat{v}$ som $\hat{v} = (-x_2, x_1)$ (udtales "v hat"). Hvordan ser vektoren $\hat{v}$ ud i forhold til v? Tegn! Vis, at v og $\hat{v}$ er ortogonale.

5) Lad nu $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Hvad er længden af vektoren v? Vink: Brug Pythagoras. I er velkomne til at nøjes med at vise det for $n = 2$.

6) Hvordan er længden af en vektor og prikproduktet relateret?

●●● Opgave 5.11:

I denne opgave beviser vi punkt 2. af Sætning 1.15. Lad $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1) Lad $v \in \mathbb{R}^n$. Bevis, at $I_n v = v$.

2) Brug forrige delopgave til at bevise $I_n A = A$.

3) Bevis, at $AI_n = A$.

●●● Opgave 5.12: Kvadratiske former

En funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kaldes en *kvadratisk form*, hvis f kan skrives på formen

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

for en matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1) Argumentér for, at en kvadratisk form faktisk er en funktion med værdier i $\mathbb{R}$.

2) Betragt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Skriv funktionen f ud eksplicit.

3) Betragt funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x, y) = x^2 + y^2$. Vis, at f er en kvadratisk form.

●●● Opgave 5.13: Positive semidefinite matricer

En matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kaldes positiv semidefinit, hvis det for enhver $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gælder, at

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \geq 0.$$

1) Vis, at

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

er positiv semidefinit.

2) Vis, at

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

er positiv semidefinit. Vink: brug kvadratsætningerne.

●● Opgave 5.14: Fibonacci-tal

Betragt matricen

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

samt Fibonacci-tallene

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Helt formelt er Fibonacci-tallene defineret rekursivt ved $F_0 = 0, F_1 = 1$ og $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ for $n \geq 0$.

1) Udregn matricerne F^2, F^3, F^4 og F^5.

2) Opskriv et udtryk for F^n, hvor Fibonacci-tallene indgår.

Man kan benytte relationen i den anden delopgave til at finde en formel for det $n$te Fibonacci-tal. For at finde formlen skal man dog have en smart måde at udregne store potenser af matricer. Det vender vi tilbage til senere i forløbet.

Lineære ligningssystemer

- **Opgave 5.15: Introduktion til lineære systemer**
  For hver ligning, bestem om de er lineære i x_1,x_2 og x_3.

$$3x_1 - \sqrt{3}x_2 + x_3 = 0$$
$$4x_1 + x_2^{2/7} + cos(3)x_3 = 8$$
$$4cos(x_1) + x_2 + x_1 = 9$$

- **Opgave 5.16: Homogene Systemer**
  Afgør ved inspektion om følgende homogene systemer har ikke-trivielle løsninger.

$$2x + y + 4z = 0$$
$$3x + y + 6x = 0$$
$$4x + y + 9x = 0$$

og

$$x_1 - x_2 + 7x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 - 6x_3 - x_4 = 0.$$

- **Opgave 5.17: Gauss-Jordan elimination**
  Løs nedenstående ligningssystemer.

1)

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

2)

$$3x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 = 13$$
$$-2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -9$$
$$-2x_1 + x_2 - 7x_4 = -8$$

3)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

●● **Opgave 5.18:**
Bestem for hvilke værdier af a systemet har 0,1 og uendeligt mange løsninger.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 1 \\ x + 2y - (a^2 - 3)z &= a. \end{aligned}$$

●● **Opgave 5.19:**
Betragt matricen

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix}$$

For hvilke værdier af a og b har systemet

1) En unik løsning

2) En en-parameter løsning

3) En to-parameter løsning

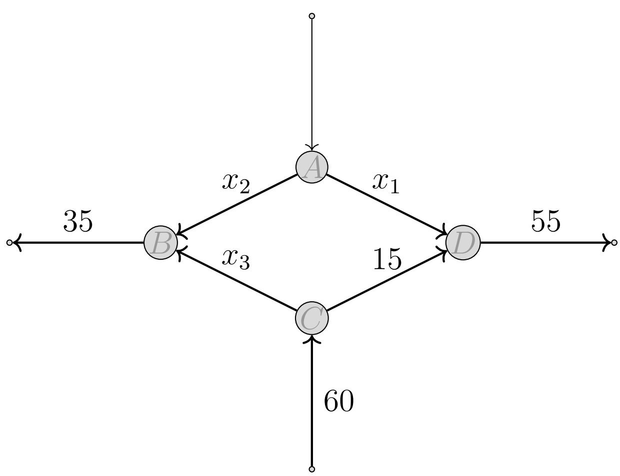
4) Ingen løsning.

Opgave 5.20:
Betragt systemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Under hvilke betingelser for (b_1,b_2,b_3) er systemet konsistent?

Opgave 5.21: Netværk



Figuren ovenfor viser et netværk med 4 knuder,hvor pilene angiver retningen på strømmen og kaldes en *forbindelse*. Strømningshastigheden er kendt for nogle af forbindelserne. Find strømningshastigheden i de resterende forbindelser. Antag at der er strømningsbevarelse, dvs. størrelsen på strømningen ud af hver knude, er lig størrelsen på strømningen ind knuden.

●●● Opgave 5.22: Interpolation

I denne opgave skal vi se på interpolation af punkter. Interpolation betyder, at man finder det polynomium som bedst beskriver en række kendte punkter. For at finde sådanne polynomiumer er lineære ligninger ikke længere nok. Et n'tegradspolynomium tager formen

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}.$$

For hvert datapunkt $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$, skal følgende ligninger holde,

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} \\
y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} \\
&\vdots \\
y_{n-1} &= a_0 + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-1}^2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}^{n-1}
\end{aligned}$$

Vi har følgende punkter,

$$(1,3), (2,-2), (3,-5), (4,0).$$

Find det tredjegradspolynomium som går gennem de givne punkter.

●●● Opgave 5.23: Kemiske reaktioner

En kemisk ligning siges at være balanceret hvis der er lige mange af hver atom på begge sider af reaktionspilen. Balancer følgende reaktioner

1)

$$\mathrm{CH_4 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O}$$

.

2)

$$\mathrm{HCl + Na_3PO_4 \longrightarrow H_3PO_4 + NaCl.}$$

Inverse matricer

- **Opgave 5.24:**
  Regn den inverse af følgende matricer.
  1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$
  2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$,
  3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
  4) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

- **Opgave 5.25: Matrixrepræsentation**
  Opstil følgende systemer på formen $Ax = b$ og løs for x for følgende to systemer.
  1)
  $$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &= 7 \\ -6x_1 + 5x_2 &= -2 \end{aligned}$$
  2)
  $$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -3 \\ -x_1 + x_2 &= 12 \end{aligned}$$

- **Opgave 5.26: Isolering og simplificering**
  Antag alle matricer er $n \times n$ og invertible. Isoler for D.
  $$ABC^{-1}DBA^{-1}C = AB^{-1}$$

Opgave 5.27:
Vi har tidligere påstået at hvis $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ og $AB = I_n$ så er $B = A^{-1}$. Bevis dette.

Opgave 5.28:
Under hvilke betingelser, hvis nogle, er følgende system konsistent?

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ x_1 + 8x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Opgave 5.29:
Lad A være en $n \times n$ invertibel matrix, og lad k være en ikke-negativ skalar.
Bevis da, at $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

Opgave 5.30:
I denne opgave vil vi betragte k systemer givet som

$$Ax = b_1, \quad Ax = b_2, \ldots, \quad Ax = b_k,$$

hvor $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Her bemærker vi at koefficientmatricen er den samme for alle systemerne. Vi har før set at man kan skrive sin totalmatrix på formen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

For at løse flere systemer på en gang udvider vi nu denne således den for to systemer tager formen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_{11} & b_{21} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_{12} & b_{22} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_{1m} & b_{2m} \end{pmatrix}$$

Løs de sidste to systemer fra opgave 5.17 på denne måde og verificer det giver samme løsning.

Diagonalisering

- **Opgave 5.31:**
Betragt matricen A givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Beregn egenværdierne for A.

2) Find egenvektorerne for A.

3) Argumentér for, hvorfor A er diagonaliserbar. Find en invertibel matrix B og en diagonalmatrix D, så $A = BDB^{-1}$.

- **Opgave 5.32:**
Betragt matricen A givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Beregn egenværdierne for A.

2) Find egenvektorerne for A.

3) Argumentér for, hvorfor A er diagonaliserbar. Find en invertibel matrix B og en diagonalmatrix D, så $A = BDB^{-1}$.

●● **Opgave 5.33:**
Betragt matricen A givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Beregn egenværdierne for A.

2) Find egenvektorerne for A.

3) Argumentér for, hvorfor A er diagonaliserbar. Find en invertibel matrix B og en diagonalmatrix D, så $A = BDB^{-1}$.

●●● **Opgave 5.34:**
Lad matricen A være givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Beregn egenværdierne for A.

2) Find egenvektorerne for A.

3) Argumentér for, hvorfor A er diagonaliserbar. Find en invertibel matrix B og en diagonalmatrix D, så $A = BDB^{-1}$.

●● **Opgave 5.35:**
Bestem egenværdier og egenvektorer for:

1) Identitetsmatricen I_n.

2) Nulmatricen $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

●● **Opgave 5.36:**
Lad $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ være en matrix med en egenværdi λ og tilhørende egenvektor v. Vis, at λ^k er en egenværdi for A^k med tilhørende egenvektor v.

●● **Opgave 5.37:**
Lad $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ være en invertibel matrix med egenværdi $\lambda \neq 0$ og tilhørende egenvektor v. Vis, at $1/\lambda$ er en egenværdi for A^{-1} med tilhørende egenvektor v.

●● **Opgave 5.38:**
Lad A være en matrix med en egenværdi λ med tilhørende egenvektorer v_1 og v_2. Vis, at

$$av_1 + bv_2$$

er en egenvektor for A til egenværdien λ for alle $a, b \in \mathbb{R}$.

●● **Opgave 5.39:**
Antag, at A er en invertibel matrix. Vis, at 0 ikke kan være en egenværdi for A.

●● **Opgave 5.40:**
Antag, at A har nok egenvektorer til at kunne diagonaliseres, og at 0 ikke er en egenværdi for A. Bevis, at A er invertibel. Vink: Brug resultatet af næste opgave.

●●● **Opgave 5.41: Determinanter og egenværdier**
Antag, at A har nok egenvektorer til at kunne diagonaliseres. Bevis, at $\det A$ er lig produktet af A's egenværdier. Vink: Husk, at determinanten opfylder $\det(AB) = \det A \det B$, og at $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

●●● **Opgave 5.42:**
Lad $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ være en intensitetsmatrix for en Markovkæ-

de. Det vil sige, at Q er på formen

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1^\star & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & -q_2^\star & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & -q_n^\star \end{pmatrix}$$

hvor $q_i^\star$ er summen af de andre indgange i samme række. Per konstruktion er summen af indgangene i hver række lig 0.

Hvilken egenværdi og tilhørende egenvektor har Q uanset intensiteterne?

3 Differens- og Sumregning

1 Introduktion

Følger

Definition 1.1. Vi definerer en *talfølge* til at være en afbildning $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$.

Altså for hvert tal, x, i mængden $\{0, 1, 2, 3, ...\}$, har vi et *følgeled*, $f(x)$, i talmængden $\mathbb{C}$. I dette forløb kommer vi dog mest til at se på talfølger med følgeled indenfor de reelle tal.

Eksempel 1.2. Talfølger kan se ud på mange måder. Her er et par eksempler:

$$\begin{array}{llllllcl} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \qquad & f(x) = x \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \dots & \qquad & f(x) = 2^x \\ 5 & \pi & \dfrac{1}{3} & e & \sqrt{2} & \dots & \qquad & f(x) = ? \end{array}$$

Som man kan se, kan vi notere følger på forskellige måder; enten ved at skrive følgeleddene op én efter én eller ved at give en forskrift for den. Der er fordele og ulemper ved begge metoder. En talfølge har pr. definition uendeligt mange følgeled og dem kan vi ikke skrive op allesammen, så dér må vi håbe at læseren fanger systemet efter en håndfuld led. Til gengæld er det ikke alle følger der har en pæn forskrift.

Når man kigger på en talfølge - uden at have en forskrift for hele følgen - kunne man spørge sig selv "Hvad er mon det næste tal i følgen?". Det er ikke altid let, og i bund og grund en umulig opgave at løse, da en følge ikke behøver at have noget system overhoved. Men i dette forløb vil vi prøve alligevel og finde værktøjer til at komme med kvalificerede bud. ○

Sumnotation

Vi kommer i løbet af dette forløb til at se summer der er længere end vi gider at skrive ud og til det benytter vi en særlig notation. Nogle af jer har måske stødt på den før.

Hvis vi gerne vil notere summen af alle hele tal fra 1 til n, skriver vi

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Mere generelt kan vi kigge på tallene $a_1, a_2, ..., a_n$. Her vil vi skrive

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Eksempel 1.3. Vi udregner et par eksempler.

$$\sum_{k=0}^{2} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$$

$$\sum_{k=1}^{10} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{16}.$$

○

2 Differenser

Differenstabeller

Når vi kigger på en følge, og gerne vil se på hvordan den udvikler sig, kan det give rigtig god mening at se på differensen mellem nabo-led i følgen. For eksempel kan vi kigge på følgen

$$0 \quad 1 \quad 5 \quad 12 \quad 22 \quad 35\ldots,$$

ser vi at mellem første og andet led er der et spring på 1. Mellem andet og tredje led er der et spring på 4 og så videre. På denne måde får vi en ny følge, vi kan skrive op under den oprindelige. Hvis vi ikke ser et klart system her, kan vi gøre det samme på vores nye følge. I dette tilfælle, får vi noget der ser således ud:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 1 & & 5 & & 12 & & 22 & & 35 & & \ldots \\
& 1 & & 4 & & 7 & & 10 & & 13 & & \ldots & \\
& & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & \ldots & &
\end{array}$$

Her ser vi et tydeligt system. nederste følge består udelukkende af 3-taller. Hvis vi antager at dette fortsætter, kan vi regne baglæns og få at; næste led i nederste følge bliver 3, næste led i midterste følge bliver $13 + 3$ og næste led i øverste følge bliver $35 + 13 + 3$, altså 51.

Den type tabel, vi har skrevet op, kaldes en *differenstabel*. Mere generelt, hvis vi har en talfølge f, vil den have nedenstående differenstabel.

$$\begin{array}{cccccc}
f(0) & & f(1) & & f(2) & \ldots \\
& f(1)-f(0) & & f(2)-f(1) & \ldots &
\end{array}$$

Differensoperatoren Δ

Definition 2.1. Vi definerer (forlæns) differens som

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

Eksempel 2.2. Vi vil gerne finde differensen af funktionen $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$.

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= f(x+1) - f(x) \\
&= (3(x+1)^2 + 4(x+1) + 5) - (3x^2 + 4x + 5) \\
&= 3x^2 + 6x + 3 + 4x + 4 + 5 - 3x^2 - 4x - 5 \\
&= 6x + 7
\end{aligned}$$

○

Sætning 2.3 (Regneregler for differeneser)**.** Lad f og g være følger og lad c være en konstant. Der gælder at

(i) $\Delta[cf(x)] = c\Delta f(x)$ (homogenitet)

(ii) $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$ (additivitet)

(iii) $\Delta[f(x)g(x)] = \Delta f(x) \cdot g(x) + f(x+1) \cdot \Delta g(x)$

(iv) $\Delta \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\Delta f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \Delta g(x)}{g(x)g(x+1)}$

Bevis. Vi beviser regneregel (iii) og overlader de resterende som opgaver til læseren.

$$\begin{aligned}
\Delta\bigl(f(x)g(x)\bigr) &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) \\
&= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) \\
&\qquad + f(x+1)g(x) - f(x+1)g(x)
\end{aligned}$$

Her har vi fået den gode idé, at lægge leddet $f(x+1)g(x)$ til og trukket det fra igen umiddelbart efter. Hvis vi nu rykker lidt rundt på vores udtryk, får vi

$$\begin{aligned}\Delta\big(f(x)g(x)\big) &= f(x+1)g(x) - f(x)g(x) \\ &\qquad + f(x+1)g(x+1) - f(x+1)g(x) \\ &= \big(f(x+1) - f(x)\big)g(x) \\ &\qquad + f(x+1)\big(g(x+1) - g(x)\big) \\ &= \Delta f(x) \cdot g(x) + f(x+1) \cdot \Delta g(x).\end{aligned}$$

■

Bemærkning 2.4. $\Delta f(x)$ er i sig selv en følge, så vi kan bruge differensoperatoren på $\Delta f(x)$ igen.

Definition 2.5. Vi definerer den *n'te differens* som

$$\Delta^n f(x) = \Delta\left[\Delta^{n-1} f(x)\right].$$

Bemærkning 2.6. Vi bemærker at følgen $f(x) = 2^x$ har den ejendommelige egenskab, at $\Delta^n 2^x = 2^x$ ligegyldigt hvilket n vi vælger, eftersom

$$\Delta 2^x = 2^{x+1} - 2^x \qquad = 2 \cdot 2^x - 2^x = (2-1)2^x \qquad = 2^x.$$

Faldende potenser

Definition 2.7. Lad $n > 0$ være et naturligt tal. Vi definerer den *faldende (faktorielle) potens*, som

$$x^{\underline{n}} = \overbrace{x \cdot (x-1) \cdots (x-n+1)}^{n \text{ faktorer}}$$

Eksempel 2.8.

$$\begin{aligned} &x^{\underline{1}} && = x \\ &x^{\underline{2}} = x(x-1) && = x^2 - x \\ &x^{\underline{3}} = x(x-1)(x-2) && = x^3 - 3x^2 + 2x \\ &x^{\underline{4}} = x(x-1(x-2)(x-3) && = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x \end{aligned}$$

○

Vi kigger nu på regneregler for disse faldende potenser. Hvis vi nu ser på $x^{\underline{n+m}}$ så vil de første n faktorer nå til $(x-n+1)$, så derfor starter de sidste m faktorer ved $(x-n)$. Vi får derved

$$x^{\underline{n+m}} = x^{\underline{n}}(x-n)^{\underline{m}}.$$

Denne regneregel kan vi nu bruge med $m = 0$ for at definere $x^{\underline{0}}$.

$$x^{\underline{n}} = x^{\underline{0+n}} = x^{\underline{0}}(x-0)^{\underline{n}} = x^{\underline{0}}x^{\underline{n}}$$

Ergo må $x^{\underline{0}} = 1$.

Da vi nu har værdien for $x^{\underline{0}}$, kan vi begynde at definere faldende potenser for negative n-værdier.

$$1 = x^{\underline{0}} = x^{\underline{-n+n}} = x^{\underline{-n}}(x-(-n))^{\underline{n}} = x^{\underline{-n}}(x+n)^{\underline{n}}$$

Da vi nu ved at $x^{\underline{-n}}(x+n)^{\underline{n}} = 1$, får vi at

$$x^{\underline{-n}} = \frac{1}{(x+n)^{\underline{n}}}.$$

Sætning 2.9. Der gælder, at

$$\Delta[x^{\underline{n}}] = nx^{\underline{n-1}}.$$

Bevis.

$$\begin{aligned}
\Delta[x^{\underline{n}}] &= (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}} \\
&= (x+1)x^{\underline{n-1}} - x^{\underline{n-1}}(x-n+1) \\
&= ((x+1)-(x-n+1))x^{\underline{n-1}} \\
&= nx^{\underline{n-1}}
\end{aligned}$$

∎

3 Kombinatorik

I dette afsnit kommer vi til at tælle forskellige kombinationer. Til det kommer vi til at introducere nogle nye tal som fremkommer så ofte i matematikken at de har fået deres egne navne.

Permutationer

Det første vi gerne vil tælle er *permutationer* eller sagt med andre ord "på hvor mange måder kan vi tage n objekter og placere dem i rækkefølge". Vi kan udregne det ved at tænke vi har n måder at vælge det første objekt, derefter har vi $n-1$ måder at vælge andet objekt da vi ikke kan vælge det første igen, sådan fortsætter vi indtil vi kommer til det sidste valg hvor der kun er én mulighed tilbage.

Definition 3.1 (Fakultet)**.** Produktet af de n første tal kalder vi "n fakultet", og vi skriver

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Derudover definerer vi fakultet for $n = 0$ til at være $0! = 1$.

Eksempel 3.2. Tysklands flag består af tre horisontale striber i hver sin farve: sort, rød og gul. Hvor mange *permutationer* findes der af disse tre farvede striber?
Vi kan starte med at vælge hvilken farve der skal placeres øverst i flaget. Hertil har vi tre muligheder. Nu Har vi to muligheder tilbage for farven i midten og når de to første farve er valgt, er der kun én mulighed tilbage for farven i bunden.
Ergo har vi $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ muligheder. ∘

Kombinationer

Det næste vi gerne vil tælle er *kombinationer*. Ved kombinationer tæller vi hvor mange måder vi kan vælge k ud af n objekter og her er vi ligeglade med rækkefølgen af de objekter vi udtager.
Hvis vi ser på $n!$ skrevet ud,

$$n! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ led}} \cdot \underbrace{(n-k) \cdots 2 \cdot 1}_{n-k \text{ led}},$$

lægger vi mærke til at vi kan udtage k objekter *med* rækkefølge på $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ måder. Her har vi bare talt for meget fordi hver udtagning af k objekter har $k!$ forskellige rækkefølger. Vi ønsker at tælle uden rækkefølge så vi får at antallet at udtage k objekter ud fra n bliver $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Definition 3.3 (Binomialkoefficient)**.** Antallet af måder at vælge k ud af n objekter kalder vi binomialkoefficienten, "n over k".

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Bemærkning 3.4. Bemærk hvad der sker hvis vi vil vælge 0 ud af n objekter. Husk at $0! = 1$ så $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$. Så vi siger altså at vi har én måde at vælge ingenting på. Det kan virke lidt tilfældigt, men giver god mening når man tænker på det omvendt: På hvor mange måder kan vi vælge n ud af n objekter (og dermed efterlade nul objekter)? Der har vi netop én måde at gøre det på, nemlig at vælge alle.

Eksempel 3.5. Givet fire objekter A, B, C og D, på hvor mange måder kan vi vælge to objekter ud af de fire?

Der er netop $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ måder:

$$\text{AB}, \quad \text{AC}, \quad \text{AD}, \quad \text{BC}, \quad \text{BD}, \quad \text{CD}.$$

$\circ$

Sætning 3.6 (Binomialkoefficient rekursiv)**.** Vi har en alternativ formel for binomialkoefficienten n over k. Hvis vi vil udregne den rekursivt bliver

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Bevis. Vi skal vælge k ud af n objekter. Lad os fokusere på et enkelt objekt og lad os da se på de to tilfælde; at objektet er med i vores udtagning eller objektet ikke er.
Hvis objektet *er* med, så mangler vi at vælge $k-1$ ud af de resterende $n-1$ objekter. Dette kan gøres på $\binom{n-1}{k-1}$ måder.
Alternativt er vores valgte objekt *ikke* med i udtagningen og vi skal vælge alle k objekter af de resterende $n-1$. Dette kan gøres på $\binom{n-1}{k}$ måder.
Summen af disse to muligheder, giver os $\binom{n}{k}$. ■

Sætning 3.7 (Binomialformlen)**.**

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k\end{aligned}$$

Sætning 3.8. Vi kan udtrykke den n'te differens som en sum ved hjælp af binomialkoefficienter:

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x) &= f(x+n) - \binom{n}{1} f(x+n-1) + \cdots + (-1)^n f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(x+n-k)\end{aligned}$$

Stirlingtal

De næste ting vi kommer til at tælle er lidt mindre oplagte. Ud af mængde på n objekter vil vi gerne vide hvor mange måder de kan indeles i k disjunkte cykler. En *cykel* er en periodisk bane af objekter. For eksempel kan vi lave cyklen (1 2 3) som er banen fra 1 til 2 til 3 og som derefter gentager sig fra 1 igen. Bemærk at den er identisk med cyklen (2 3 1) samt (3 1 2), men *ikke* (1 3 2). I en cykel kan samme element ikke optræde flere gange.

Eksempel 3.9. Givet fire objekter 1, 2, 3 og 4, på hvor mange måder kan de indeles i to disjunkte cykler.

$$\begin{array}{llll} (1)(2\ 3\ 4), & (2)(1\ 3\ 4), & (3)(1\ 2\ 4), & (4)(1\ 2\ 3), \\ (1)(2\ 4\ 3), & (2)(1\ 4\ 3), & (3)(1\ 4\ 2), & (4)(1\ 3\ 2), \\ (1\ 2)(3\ 4), & (1\ 3)(2\ 4), & (1\ 4)(2\ 3). & \end{array}$$

Dette kan vi gøre på 11 måder. ○

Definition 3.10 (Stirlingtal af den første slags)**.** Antallet af måder vi kan inddele n objekter i k disjunkte cykler, kalder vi Stirlingtal af den første slags. Vi definerer tallene rekursivt.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1 \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0 \quad \text{for } k \leq 0 \text{ eller } k > n.$$

Sætning 3.11. Polynomiet der fremkommer af faldende potenser af x, kan beskrives ved hjælp af Stirlingtal af første slags.

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k$$

Sidst men ikke mindst, vil gerne tælle antallet af måder vi kan inddele en mængde af n objekter i k delmængder.

Eksempel 3.12. Givet fire objekter, her kortkulører, på hvor mange måder kan de indeles i to delmængder?

$$\{\spadesuit\} \cup \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}, \quad \{\heartsuit\} \cup \{\spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit\}, \quad \{\diamondsuit\} \cup \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\},$$
$$\{\clubsuit\} \cup \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}, \quad \{\spadesuit, \heartsuit\} \cup \{\diamondsuit, \clubsuit\}, \quad \{\spadesuit, \diamondsuit\} \cup \{\heartsuit, \clubsuit\},$$
$$\{\spadesuit, \clubsuit\} \cup \{\heartsuit, \diamondsuit\}.$$

Dette kan vi gøre på syv måder. ○

Definition 3.13 (Stirlingtal af den anden slags)**.** Antallet af måder vi kan inddele n objekter i k delmængder, kalder vi Stirlingtal af den anden slags. Vi definerer disse tal rekursivt.

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\},$$
$$\left\{ {n \atop n} \right\} = 1 \quad \text{og} \quad \left\{ {n \atop k} \right\} = 0 \quad \text{for } k \leq 0 \text{ eller } k > n.$$

Sætning 3.14. Vi kan ved hjælp af Stirlingtal af den anden slags skabe denne kobling mellem faldende og normale potenser af x:

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$$

4 Summer

Det er tid til at vende ting lidt på hovedet. Indtil videre har vi gennemgået, hvordan man finder differenser på næsten alt, men hvad nu hvis vi kender differensen, kan vi så finde tilbage igen?

Ubestemte summer

Lad os starte med at betragte ligningen

$$\Delta F(x) = f(x)$$

hvor vi kender $f(x)$. Kan vi nu finde en funktion $F(x)$ som opfylder ligningen.
Vi starter med at bemærke, at

$$\begin{aligned}
F(0) &= F(0) \\
F(1) &= F(0) + \Delta F(0) = F(0) + f(0) \\
F(2) &= F(1) + \Delta F(1) = F(0) + f(0) + f(1) \\
&\vdots \\
F(n+1) &= F(0) + f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \\
&= F(0) + \sum_{k=0}^{n} f(k).
\end{aligned}$$

Vi har nu set at der eksisterer løsninger til ligningen, og kunne for eksempel vælge funktionen, hvor $F(0) = 0$.
Det næste man kunne spørge sig selv om er, hvor "unikke" disse løsninger er. Hvis vi betragter funktionerne $F_1(x)$ og $F_2(x)$, som begge opfylder ligningen, ser vi, at

$$\begin{aligned}
\Delta F_1(x) - \Delta F_2(x) &= f(x) - f(x) \\
\Delta\big[F_1(x) - F_2(x)\big] &= 0 \\
F_1(x) - F_2(x) &= C,
\end{aligned}$$

hvor C er en konstant. Det eneste, som adskiller løsningerne til ligningen, er altså en konstant. En anden måde at fortolke dette på er vores valg af $F(0)$ fra før.

Definition 4.1 (Ubestemt sum)**.** En funktion $F(x)$ som opfylder at $\Delta F(x) = f(x)$ kaldes for en *antidifferens* til f. Med den *ubestemte sum* af f betegner vi mængden af funktioner, som er antidifferens til f

$$\sum f(x)\,\delta x = F(x) + C,$$

hvor C er en konstant.

Sætning 4.2 (Regneregler for summer)**.** Lad f og g være følger og lad c være en konstant. Der gælder at

(i) $\sum cf(x)\,\delta x = c\sum f(x)\,\delta x$ (homogenitet)

(ii) $\sum f(x) + g(x)\,\delta x = \sum f(x)\,\delta x + \sum g(x)\,\delta x$ (additivitet)

(iii) $\sum f(x)\Delta g(x)\,\delta x = f(x)g(x) - \sum \Delta f(x)g(x+1)\,\delta x$

Den sidste regel kommer vi også til at referere til som *partiel summation.*

Bestemte summer

Sætning 4.3 (Sumregningens hovedsætning)**.** Lad f og F være følger således at $\Delta F(x) = f(x)$, da gælder

$$\sum\nolimits_a^b f(x)\,\delta x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Sætning 4.4.

$$\sum\nolimits_a^b f(x)\,\delta x = \sum_{k=a}^{b-1} f(k)$$

Eksempel 4.5. Vi vil gerne beregne følgende sum:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

Vi starter med at bemærke, at

$$\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=0}^{98}\frac{1}{(k+1)(k+2)},$$

og eftersom

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=x^{\underline{-2}},$$

så kan vi udregne summen på følgende måde

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_0^{99} x^{\underline{-2}}\,\delta x &= \left[-x^{\underline{-1}}\right]_0^{99}\\ &= \frac{-1}{100}-\frac{-1}{1}=\frac{99}{100}.\end{aligned}$$

○

Sætning 4.6 (Indskudsregel)**.**

$$\sum\nolimits_a^b f(x)\,\delta x=\sum\nolimits_a^c f(x)\,\delta x+\sum\nolimits_c^b f(x)\,\delta x$$

Eksempel 4.7. Et simpelt sprog som udelukkende består af bogstaverne `a` og `b`, har givet betydning til alle ord på højst 10 bogstaver.

`a`	ja
`b`	nej
`aa`	goddag
`ab`	farvel
`ba`	undskyld
`bb`	tak
⋮	
`aabbab`	makrel i tomat
⋮	
`bbbbbbbbbb`	chokoladekiks

Hvor mange bogstaver ville vi skulle bruge på at skrive alle ord i sproget netop en gang?
Vi starter med at bemærke at der eksisterer 2 ord af længde 1, 4 ord af længde 2 og generelt 2^n ord af længde n. Vi ønsker altså at udregne summen

$$\sum_{k=1}^{10} 2^k \cdot k = \sum\nolimits_1^{11} 2^x \cdot x \,\delta x$$

Ved hjælp af reglen om partiel summation hvor $f(x) = x$ og $g(x) = 2^x$, ser vi at

$$\sum x \cdot 2^x \,\delta x = x \cdot 2^x - \sum 1 \cdot 2^{x+1} \,\delta x = (x-2)2^x + C$$

Altså er

$$\sum\nolimits_1^{11} 2^x \cdot x \,\delta x = \Big[(x-2)2^x\Big]_1^{11} = 9 \cdot 2^{11} - (-1) \cdot 2^1 = 18434$$

Vi skal altså bruge 18.434 bogstaver for at skrive samtlige ord i det simple sproget. ◦

5 Opgaver

• **Opgave 5.1:**
Lav differenstabeller for disse talfølger:

1) $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots$

2) $0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, \ldots$

3) $0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, \ldots$

• **Opgave 5.2:**
Udregn differensen af $f(x) = ax^2 + bx + c$.

••• **Opgave 5.3:**
Lad n være et negativt tal. Vis, at $\Delta x^{\underline{n}} = nx^{\underline{n-1}}$.

••• **Opgave 5.4:**
Bevis at følgende regneregler holder:

1) $\Delta\big(cf(x)\big) = c\Delta f(x)$

2) $\Delta\big(f(x) + g(x)\big) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$

3) $\Delta \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\Delta f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \Delta g(x)}{g(x)g(x+1)}$

• **Opgave 5.5:**
For $n > 0$ hvad er $0^{\underline{n}}$, $0^{\underline{0}}$ og $0^{\underline{-n}}$.

• **Opgave 5.6:**
Produktreglen for differenser siger, at

$$\Delta\big(f(x)g(x)\big) = \Delta f(x) \cdot g(x) + f(x+1) \cdot \Delta g(x).$$

Overvej, hvordan denne formel kan være rigtig, når venstresiden er symmetrisk med hensyn til f og g, mens højresiden ikke er?

●● Opgave 5.7:

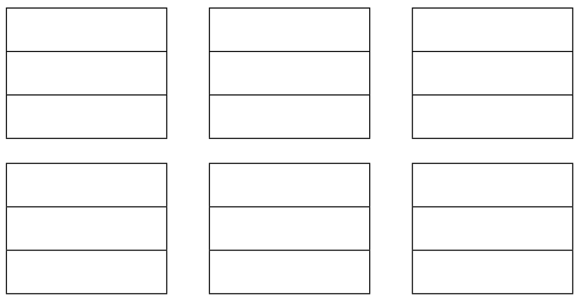
Vis at $\dfrac{x^{\underline{m}}}{(x-n)^{\underline{m}}} = \dfrac{x^{\underline{n}}}{(x-m)^{\underline{n}}}$.

●● Opgave 5.8:

Vis at $\Delta \log\big(f(x)\big) = \log\left(1 + \dfrac{\Delta f(x)}{f(x)}\right)$.

● Opgave 5.9:

Farvelæg flagene på de seks måder vi kan permutere farverne i Tysklands flag. Se eksempel 3.2.



6 Tabeller

Funktion: $f(x)$	**Differens:** $\Delta f(x)$	**Sum:** $\sum f(x)\,\delta x$
c	0	cx
$ax+b$	a	$\dfrac{ax^2-ax+2bx}{2}$
$x^{\underline{n}}$, $n \neq -1$	$nx^{\underline{n-1}}$	$\dfrac{x^{\underline{n+1}}}{n+1}$
$x^{\underline{-1}}$	$-x^{\underline{-2}}$	H_x
2^x	2^x	2^x
a^x, $a \neq 1$	$(a-1)a^x$	$\dfrac{a^x}{a-1}$
H_x	$x^{\underline{-1}}$	$xH_x - x$
F_x	F_{x-1}	F_{x+1}
$\binom{x}{n}$	$\binom{x}{n-1}$	$\binom{x}{n+1}$
$\log(1+x)$	$\log(1+x^{\underline{-1}})$	$\log(x!)$
$\sin(ax)$, $a \neq 2n\pi$	$2\sin(\frac{a}{2})\cos(ax+\frac{a}{2})$	$-\dfrac{\cos(ax-\frac{a}{2})}{2\sin(\frac{a}{2})}$
$\cos(ax)$, $a \neq 2n\pi$	$-2\sin(\frac{a}{2})\sin(ax+\frac{a}{2})$	$\dfrac{\sin(ax-\frac{a}{2})}{2\sin(\frac{a}{2})}$

Tabel 3.1: Elementære funktioner og deres differenser og summer.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Tabel 3.2: Pascals trekant - Binomialkoefficienter $\binom{n}{k}$.

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	–1	1						
3	2	–3	1					
4	–6	11	–6	1				
5	24	–50	35	–10	1			
6	–120	274	–225	85	–15	1		
7	720	–1764	1624	–735	175	–21	1	
8	–5040	18068	–13132	6769	–1960	322	–28	1

Tabel 3.3: Stirlingtal af første slags $\left[{n \atop k}\right]$.

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	7	6	1				
5	1	15	25	10	1			
6	1	31	90	65	15	1		
7	1	63	301	350	140	21	1	
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Tabel 3.4: Stirlingtal af anden slags $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

4 Matematisk Logik

1 Hvad er logik?

Logik er det, der ligger forud for matematikken. Vi antager så lidt som muligt, og derfra opbygger vi logikken, som er en slags værktøjskasse til at udarbejde beviser og definere, hvad matematik er. I modsætning til resten af matematikken er logik både konsistent og fuldstændig (hvis du vil lære mere om, hvad fuldstændighed betyder i resten af matematikken, kan du evt. slå "Gödels fuldstændighedssætninger" op).

Matematisk logik forsøger grundlæggende at bestemme hvad, der er sandt i matematikken. Men hvordan definerer vi sandhed? Det kan man få en længere diskussion ud af, og vi vil forholde os nærmere til det, når vi har nogle definitioner på plads.

Et udsagn er noget, som enten er sandt eller falskt. Til at starte med vil vi ikke bekymre os om, hvorvidt udsagn er sande, men blot hvorvidt de giver mening som udsagn. Udsagn kan sagtens give mening uden, at de nødvendigvis er sande. Altså adskiller vi udsagn og sandhed. "MatCamp er sjovt" er et eksempel på et udsagn (men vi ved selvfølgelig allerede, at det er sandt!).

Eksempel 1.1. Her er nogle eksempler på udsagn:

1. Europa er et land.

2. $1 + 1 = 2$

3. $1 + 1 = 3$

4. 27 er et primtal.

5. $x + 2 = 4$

Selvom det kun er nummer 2, der er (definitivt) sandt, så er de andre fire stadig udsagn! Det femte udsagn kan vi ikke umiddelbart afgøre om er sandt, da dette kræver mere information. ◦

Eksempel 1.2. Her er nogle *IKKE*-eksempler:

1. Hjalte og Hans

2. $7 + 8$

3. MatCamp

4. Søg ind på universitetet

Selvom vi er glade for vores koordinatorer, så er "Hjalte og Hans" ikke et udtryk, som kan være sandt eller falskt, så det er ikke et udsagn. Det samme gælder for de resterende ikke-eksempler. ◦

2 Introduktion til udsagnslogik

Et logisk udsagn består af en sammensætning af logiske symboler. For at kunne introducere resten bliver vi nødt til at starte med logiske variable.

Definition 2.1 (Logisk variabel)**.** En *logisk variabel* er et bogstav (typisk bruger vi p, q og r), som er en slags repræsentant for et udsagn.

I Eksempel 1.1 kan p være repræsentant for et vilkårligt udsagn. Når vi bruger logiske variable behøver vi ikke at definere på forhånd, hvad en given logisk variabel repræsenterer. Faktisk undlader vi typisk at specificere, hvad de enkelte variable betyder, når vi arbejder generelt med udsagnslogik. Vi kan sammenligne det med, at vi opskriver ligninger med variable $a^2 + b^2 = c^2$ fremfor med tal $3^2 + 4^2 = 5^2$. Ved at bevise ligningen med variable ved vi, at den også gælder, når vi indsætter passende tal.

Vi kan nu definere en række konnektivsymboler, som er en slags funktioner, der tager et antal logiske udsagn og skaber et nyt udsagn.

Definition 2.2 (Konnektivsymboler)**.** *Konnektivsymbolerne* definerer vi på følgende måde:

- *Negation*: $(\neg p)$ (udtales "non p") betyder "det modsatte af p". Med andre ord, hvis p er sand, så er $\neg p$ falsk, og omvendt.

- *Konjunktion (og)*: $(p \wedge q)$ (udtales "p og q") er sand, når både p og q er sande. Ellers er det falskt.

- *Disjunktion (eller)*: $(p \vee q)$ (udtales "p eller q") er sand, hvis p og/eller q er sand. Det er kun falskt, hvis både p og q er falske.

- *Implikation*: $(p \to q)$ (udtales "p medfører q") betyder, at hvis p gælder, så gælder q også. Udsagnet er falskt, hvis q er falsk og p er sand, ellers er udsagnet sandt.
- *Biimplikation*: $(p \leftrightarrow q)$ (udtales "p er ensbetydende med q") betyder, at p gælder, hvis og kun hvis q også gælder. Udsagnet er sandt, hvis p og q enten begge er sande eller begge er falske, ellers er udsagnet falskt.

Bemærkning 2.3. Bemærk, at vi bruger parenteser, når vi anvender et konnektivsymbol. Dette gør vi for at sikre, at udsagnet ikke bliver tvetydigt, når vi senere hen anvender flere konnektivsymboler i samme udsagn.

Bemærk også, at der findes mange flere konnektivsymboler end dem, som vi har introduceret her. Dog vil vi nøjes med at arbejde med dem, som står i Definition 2.2, da alle andre konnektivsymboler kan konstrueres ud fra disse.

I denne definition har vi brugt *sandhedsværdier* til at definere konnektivsymbolerne. Vi arbejder med to sandhedsværdier: sand (S) og falsk (F). Nogle gange bruger man også T eller 1 for sand og 0 for falsk. T og F er engelsk for "True" og "False", hvor 1 og 0 er binært (altså computer-sprog). Vores variable repræsenterer udsagn, som vi ikke har afgjort om er sande eller falske, men vi kan alligevel beregne sandhedsværdier for sammensatte udsagn ved at indsætte mulige sandhedsværdier for de variable, der indgår i udsagnet. Dette gør vi ved hjælp af *sandhedstabeller*. Nedenstående sandhedstabel opsummerer ovenstående definition.

p	q	$(\neg p)$	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \rightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q)$
S	S	F	S	S	S	S
S	F	F	F	S	F	F
F	S	S	F	S	S	F
F	F	S	F	F	S	S

Tabel 4.1: Sandhedstabel for Definition 2.2.

I følgende eksempel oversætter vi dagligdagssprog til logiske udsagn.

Eksempel 2.4. Lad p være udsagnet "jeg er glad" og q være udsagnet "solen skinner". Da kan vi lave følgende oversættelser mellem dagligdagssprog og logiske udsagn:

- $(\neg p)$: "Jeg er ikke glad."
- $(p \wedge q)$: "Jeg er glad og solen skinner."
- $(q \rightarrow p)$: "Når solen skinner er jeg glad."
- $(p \leftrightarrow q)$: "Jeg er kun glad, når solen skinner, og solen skinner kun, når jeg er glad."

$\circ$

3 Grammatik

Bare rolig – dette er ikke en dansklektion!

Definition 3.1 (Udtryk)**.** Et *udtryk* er en sammensætning af logiske variable, konnektiver og parenteser. Et udtryk kan også kaldes en symbolstreng.

Eksempel 3.2. Følgende er eksempler på udtryk:

- $(\neg p)$
- $((qpr$
- $\to r$
- $((\neg r) \to q)$

Bemærk, at udsagn også er udtryk, men at det ikke er alle udtryk, der er udsagn. For eksempel er $((qpr$ et udtryk, men ikke et udsagn. ○

Selvom vi har snakket en masse om udsagn, så har vi endnu ikke defineret det, vi kalder logiske udsagn. Først bliver vi dog nødt til at definere konnektivfunktioner.

Definition 3.3 (Konnektivfunktioner)**.** For hvert konnektivsymbol kan vi definere en *konnektivfunktion*. Lad α og β være udtryk. Da definerer vi følgende konnektivfunktioner:

- $K_\neg(\alpha) := (\neg\alpha)$
- $K_\wedge(\alpha, \beta) := (\alpha \wedge \beta)$
- $K_\vee(\alpha, \beta) := (\alpha \vee \beta)$
- $K_\to(\alpha,\beta) := (\alpha \to \beta)$
- $K_\leftrightarrow(\alpha,\beta) := (\alpha \leftrightarrow \beta)$

Vi kan nu definere logiske udsagn.

Definition 3.4 (Logisk udsagn)**.** *Logiske udsagn* er udtryk med følgende ekstra regler:

- Alle logiske variable er logiske udsagn.
- Hvis α og β er logiske udsagn, da er følgende også:
  - $K_{\neg}(\alpha)$
  - $K_{\wedge}(\alpha, \beta)$
  - $K_{\vee}(\alpha, \beta)$
  - $K_{\rightarrow}(\alpha, \beta)$
  - $K_{\leftrightarrow}(\alpha, \beta)$

Fra nu af vil udsagn være mere eller mindre synonyme med logiske udsagn.

Bemærkning 3.5. Ovenstående er, hvad man kalder en rekursiv definition. Vi har altså defineret "udgangspunktet" og dernæst brugt en række funktioner til at beskrive, hvordan man fra ét "niveau" definerer det næste.

Eksempel 3.6. Vi vil vise, at $((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r))$ er et logisk udsagn.

- Da p, q og r er logiske variable, er de specielt logiske udsagn.
- Da r er et logisk udsagn, så er $K_{\neg}(r) = (\neg r)$ et logisk udsagn.
- Da p og q er logiske udsagn, så er $K_{\rightarrow}(p,q) = (p \rightarrow q)$ et logisk udsagn.
- Per de to ovenstående, så er $K_{\rightarrow}((p \rightarrow q),(\neg r)) = ((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r))$ et logisk udsagn.

Man kan også lave alle skridtene på en gang:

$$K_{\rightarrow}(K_{\rightarrow}(p,q),K_{\neg}(r)) = ((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r)).$$

$\circ$

Bemærkning 3.7. Her bliver det tydeligt, hvorfor vi bruger parenteser. Hvis vi ikke havde nogle parenteser, ville udsagnet være tvetydigt. Dog kan man godt udelade nogle parenteser. Følgende konvention beskriver hvilke konnektivsymboler, som man anvender først. Dette gør, at vi kan udelade en del parenteser. Konventionen definerer hvilken rækkefølge, som man skal læse et logisk udsagn i. I almindelig regning anvender man for eksempel multiplikation (gange) før addition (plus). I logik anvendes konnektivsymbolerne i følgende rækkefølge:

- Negation, $\neg$
- Konjunktion, $\wedge$
- Disjunktion, $\vee$
- Implikation, $\rightarrow$
- Biimplikation, $\leftrightarrow$

Vær særligt opmærksom, når du fjerner parenteser i et udsagn, der involverer flere implikationer. Når vi arbejder mere med sandhed, bliver det tydeligere, hvorfor dette er vigtigt.

Fra nu af vil vi skrive udsagn, så de indeholder færrest mulige parenteser, selvom dette ikke er helt formelt. Når vi fjerner alt overflødigt fra et udsagn, så kalder vi det ofte et *reduceret* udsagn.

Eksempel 3.8. Lad p og q være logiske variable. Da er $K_{\rightarrow}(K_{\wedge}(p,q),K_{\neg}(q)) = ((p \wedge q) \rightarrow (\neg q))$ et logisk udsagn.

Men kan vi fjerne nogle af parenteserne? Ifølge konventionen skal vi anvende negation først. Vi kan altid fjerne parenteserne rundt om $\neg$, da det er det altid er det første vi bruger. Så vi kan blot skrive $\neg q$. Ifølge konventionen skal vi dernæst anvende konjunktion, så vi kan tilsvarende fjerne parenteser og blot skrive $p \wedge q$. Til sidst skal vi anvende implikation, og der er kun én implikation, så vi kan også fjerne de parenteser - faktisk kan man altid fjerne de yderste parenteser. Vi står altså tilbage med udsagnet $p \wedge q \to \neg q$.
Der er i princippet ikke nogle regler om, hvorvidt man *skal* fjerne så mange parenteser, som er muligt. Så man kan også bevare nogle parenteser, hvis man synes, at det er nemmere at læse. For eksempel kunne vi have nøjes med at fjerne de yderste parenteser $(p \wedge q) \to (\neg q)$, så det er nemt og hurtigt at se, hvad implikationen er imellem. ○

Eksempel 3.9. Vi betragter nu $K_\neg\,(K_\vee(p,q)) = (\neg(p \vee q))$, som også er et logisk udsagn. Vi kan igen starte med at fjerne de parenteser, der hører til $\neg$ – altså de yderste. Så har vi udsagnet $\neg(p \vee q)$. Men kan vi fjerne det andet sæt parenteser? Hvis vi fjernede dem, ville udsagnet være $\neg p \vee q$, men når vi følger konventionen ville dette læses som "ikke-p eller q" – altså $((\neg p) \vee q)$, hvilket jo ikke er vores originale udsagn! Derfor kan vi ikke fjerne det andet sæt parenteser, så vores reducerede udsagn bliver $\neg(p \vee q)$. ○

4 Sandhed

Vi har allerede snakket lidt om sandhed. I dette afsnit vil vi definere det mere stringent.

Sandhedstabeller

Tidligere gav vi en smagsprøve på sandhedstabeller. I forbindelse med Definition 2.2 opskrev vi følgende sandhedstabel.

p	q	$(\neg p)$	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \to q)$	$(p \leftrightarrow q)$
S	S	F	S	S	S	S
S	F	F	F	S	F	F
F	S	S	F	S	S	F
F	F	S	F	F	S	S

Men man kan også lave sandhedstabeller for sammensatte udsagn. For at sammensætte udsagn betragter man hver konnektivfunktion for sig.

Eksempel 4.1. Vi kan nu opskrive sandhedstabellen for udsagnet i Eksempel 3.8. Vi har her valgt at bevare nogle af parenteserne for at tydeliggøre hvilket konnektivsymbol, der er fokus på i den pågældende kolonne.

p	q	$p \wedge q$	$\neg q$	$(p \wedge q) \to (\neg q)$
S	S	S	F	F
S	F	F	S	S
F	S	F	F	S
F	F	F	S	S

○

Eksempel 4.2. Her er et andet eksempel – nu med α og β som logiske udsagn! Dette eksempel viser også, at $\neg\alpha \vee \beta$ er "det samme" udsagn som $\alpha \to \beta$. ○

α	β	$\neg\alpha$	$\neg\alpha \vee \beta$	$\alpha \to \beta$
S	S	F	S	S
S	F	F	F	F
F	S	S	S	S
F	F	S	S	S

Hvis man har tre logiske variable, så er der selvfølgelig flere mulige sammensætninger af sandshedsværdier. Ved to variable er der i alt $2^2 = 4$ mulige kombinationer af sandhedsværdier, hvor der ved tre variable er hele $2^3 = 8$ mulige kombinationer.

Eksempel 4.3. I følgende sandhedstabel er der tre logiske variable. ○

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$
S	S	S	S	S
S	S	F	S	F
S	F	S	F	S
S	F	F	F	S
F	S	S	F	S
F	S	F	F	S
F	F	S	F	S
F	F	F	F	S

Sandhedsfunktioner

Sandhedstabeller er gode til at få overblik – især i starten, når man skal lære at beregne sandhedsværdier. For at gøre det mere formelt vil vi nu introducere sandhedsfunktioner. Hvor man med en sandhedstabel kan se alle mulige sandhedsværdier på en gang, så behandler en sandhedsfunktion kun én mulig sandhedsværdi af gangen for hver variabel.

Definition 4.4 (Sandhedsfunktion)**.** En *sandhedsfunktion* er en funktion $v\colon \{\text{logiske variable}\} \to \{1{,}0\}$. En sandhedsfunktion tildeler altså hver variabel en bestemt sandhedsværdi. Bemærk, at vi for hver variabel har to valgmuligheder, så en konkret sandhedsfunktion vil altså beskrive et valg af sandhedsværdi for hver variabel.

Bemærkning 4.5. I denne definition har vi brugt 1 og 0 i stedet for S og F. Det bliver meget snart tydeligt, hvorfor vi har taget dette valg.

Den sandhedsfunktion, som vi lige har defineret, kan selvfølgelig ikke tildele alle udsagn sandhedsværdier, men kun de logiske variable. For at kunne tildele en sandhedsværdi til alle udsagn vil vi rekursivt definere den udvidede sandhedsfunktion.

Definition 4.6 (Udvidet sandhedsfunktion)**.** For en givet sandhedsfunktion $v\colon \{\text{logiske variable}\} \to \{1{,}0\}$ er den *udvidede sandhedsfunktion* $\overline{v}\colon \{\text{logiske udsagn}\} \to \{1{,}0\}$ defineret på følgende måde.

- Lad p være en logisk variabel. Da er $\overline{v}(p) = v(p)$.
- Lad α og β være logiske udsagn. Da er
  - $\overline{v}\left((\neg\alpha)\right) = 1 - \overline{v}\left(\alpha\right)$;
  - $\overline{v}\left((\alpha \wedge \beta)\right) = \min\left\{\overline{v}\left(\alpha\right), \overline{v}\left(\beta\right)\right\}$;

- $\overline{v}\left((\alpha \vee \beta)\right) = \max\left\{\overline{v}\left(\alpha\right), \overline{v}\left(\beta\right)\right\}$;
- $\overline{v}\left((\alpha \to \beta)\right) = \overline{v}\left(((\neg\alpha) \vee \beta)\right)$;
- $\overline{v}\left((\alpha \leftrightarrow \beta)\right) = \overline{v}\left(((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha))\right)$.

Bemærkning 4.7. Følgende er værd at bide mærke i, når man læser definitionen:

- Funktionen min udvælger den mindste værdi, og funktionen max udvælger den største værdi.
- I Eksempel 4.2 viser vi, at $\alpha \to \beta$ og $\neg\alpha \vee \beta$ er "det samme" udsagn, hvilket hjælper, når vi skal definere $\overline{v}$.
- Faktisk er $\alpha \leftrightarrow \beta$ det samme som, at både $\alpha \to \beta$ og $\beta \to \alpha$ gælder! At vise at dette gælder, er formålet med Opgave 8.9.

Eksempel 4.8. Vi betragter nu udsagnet

$$(p \wedge q) \to r.$$

I Eksempel 4.3 fandt vi udsagnets mulige sandhedsværdier ved hjælp af en sandhedstabel. Vi vil nu finde nogle mulige sandhedsværdier ved hjælp af de udvidede sandhedsfunktioner. Lad $v_1(p) = 1$, $v_1(q) = 0$ og $v_1(r) = 1$. Da er

$$\overline{v_1}\left((p \wedge q)\right) = \min\left\{\overline{v_1}\left(p\right), \overline{v_1}\left(q\right)\right\} = \min\{1,0\} = 0,$$

så

$$\overline{v_1}((\neg(p \wedge q))) = 1 - \overline{v_1}\left((p \wedge q)\right) = 1 - 0 = 1.$$

Altså er

$$\begin{aligned}\overline{v_1}\left(((p \wedge q) \to r)\right) &= \overline{v_1}\left(((\neg(p \wedge q)) \vee r)\right)\\ &= \max\{\overline{v_1}((\neg(p \wedge q))), \overline{v_1}(r)\}\\ &= \max\{1,1\} = 1,\end{aligned}$$

hvilket stemmer overens med vores sandhedstabel i det tidligere eksempel. Vi vil nu definere en ny sandhedsfunktion. Lad $v_2(p) = 1$, $v_2(q) = 1$ og $v_2(r) = 0$. Da er

$$\overline{v_2}\left((p \wedge q)\right) = \min\left\{\overline{v_2}\left(p\right), \overline{v_2}\left(q\right)\right\} = \min\{1,1\} = 1,$$

så

$$\overline{v_2}((\neg(p \wedge q))) = 1 - \overline{v_2}\left((p \wedge q)\right) = 1 - 1 = 0.$$

Altså er

$$\begin{aligned}\overline{v_2}\left(((p \wedge q) \rightarrow r)\right) &= \overline{v_2}\left(((\neg(p \wedge q)) \vee r)\right)\\ &= \max\{\overline{v_2}((\neg(p \wedge q))), \overline{v_2}(r)\}\\ &= \max\{0,0\} = 0,\end{aligned}$$

som også er det, vi får fra sandhedstabellen! ◦

Proposition 4.9. De udvidede sandhedsfunktioner giver samme sandhedsværdier, som ved beregning med en sandhedstabel. Formelt siger vi, at sandhedsværdien er entydigt bestemt.

Normalt ville vi straks bevise vores sætning, men dette kræver en bevismetode (logisk induktion), som vi endnu ikke er nået til. Så I må vente i spænding!

Som I kan se, bruger vi de udvidede sandhedsfunktioner til at definere sandhed og at vise gyldigheden af sandhedstabeller. Vi kan også bruge dem i beviser, men i mere konkrete tilfælde vil man oftest bruge sandhedstabeller, da de giver et bedre overblik. Den primære grund til at introducere dem er altså at øge formaliteten.

Tautologier

Er det interessant at betragte udsagn, som altid er sande? Umiddelbart kunne man tro, at svaret var nej. Men denne slags udsagn viser sig at være vigtige for at bekræfte, at vores bevismetoder er gyldige.

Definition 4.10 (Tautologi)**.** En *tautologi* er et logisk udsagn, som altid er sandt. Mere formelt er det et udsagn α, hvor $\overline{v}(\alpha) = 1$ for alle udvidede sandhedsfunktioner $\overline{v}$.

Eksempel 4.11. Betragt udsagnet $\neg p \vee p$. Da er der to mulige sandhedsfunktioner v_0 og v_1, hvor $v_0(p) = 0$ og $v_1(p) = 1$. Da er $\overline{v_0}(\neg p \vee p) = \max\{\overline{v_0}(\neg p), \overline{v_0}(p)\} = \max\{1 - 0, 0\} = 1$ og $\overline{v_1}(\neg p \vee p) = \max\{\overline{v_1}(\neg p), \overline{v_1}(p)\} = \max\{1 - 1, 1\} = 1$. Altså er $\overline{v}(\neg p \vee p) = 1$ for alle udvidede sandhedsfunktioner $\overline{v}$, hvorfor $\neg p \vee p$ er en tautologi. ◦

Eksempel 4.12. Betragt udsagnet $p \to p$. Da er der to mulige sandhedsfunktioner v_0 og v_1, hvor $v_0(p) = 0$ og $v_1(p) = 1$. Da er $\overline{v_0}(p \to p) = \overline{v_0}(\neg p \vee p) = 1$ og $\overline{v_1}(p \to p) = \overline{v_1}(\neg p \vee p) = 1$, ifølge Eksempel 4.11. Så $\overline{v}(p \to p) = 1$ for alle udvidede sandhedsfunktioner $\overline{v}$, hvorfor $p \to p$ er en tautologi. ◦

Nu hvor vi forstår tautologier, kan vi definere logisk ækvivalens.

Definition 4.13 (Logisk ækvivalens)**.** Lad α og β være logiske udsagn. Da er α og β *logisk ækvivalente*, hvis $\alpha \leftrightarrow \beta$ er en tautologi. Hvis α og β er logisk ækvivalente, så skriver vi $\alpha \equiv \beta$.

Eksempel 4.14. Følgende er en samling af logiske ækvivalenser, hvilket bevises i Opgave 8.13.

1. Associative love:

$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r)).$$

$$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r)).$$

$$((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)).$$

2. Distributive love:

$$(p \wedge (q \vee r) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)).$$

$$(p \vee (q \wedge r) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r)).$$

3. Negationer:

$$\begin{aligned}(\neg(\neg p)) &\equiv p. \\ (\neg(p \to q)) &\equiv (p \wedge (\neg q)). \\ (\neg(p \leftrightarrow q)) &\equiv ((p \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge q)).\end{aligned}$$

4. De Morgans lov:

$$(\neg(p \wedge q)) \equiv ((\neg p) \vee (\neg q)).$$

$$(\neg(p \vee q)) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q)).$$

5. Andre:

   - Kontraposition:

$$(p \to q) \equiv ((\neg q) \to (\neg p)).$$

   - Erstatning:

$$((p \wedge q) \to r) \equiv (p \to (q \to r)).$$

$\circ$

5 Beviser - hvorfor virker de?

I har set en række forskellige bevismetoder, men hvorfor virker disse metoder rent faktisk? For at kunne gå i gang med at vise bevismetodernes gyldighed skal vi først formalisere konceptet deduktion. Vi starter med følgende definition.

Definition 5.1 (Tautologisk konsekvens)**.** Lad $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha$ være logiske udsagn, hvor $n \in \mathbb{N}_0$. Hvis α er sand, når alle $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ er sande, så siger vi, at α er en *tautologisk konsekvens* af $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$. Dette skrives

$$\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \vDash \alpha.$$

Man kan nu passende spørge, hvad dette dog har med tautologier at gøre. Heldigvis skal vi allerede bruge tautologier!

Sætning 5.2. Hvis $n \geq 1$, da er α en tautologisk konsekvens af $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, hvis og kun hvis

$$(\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n) \to \alpha$$

er en tautologi. Hvis $n = 0$, da er α en tautologisk konsekvens af $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} = \emptyset$, hvis og kun hvis α er en tautologi.

Bevis. Vi vil først vise resultatet for $n \geq 1$.

$\underline{\Rightarrow:}$ Antag, at $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \vDash \alpha$. Da er der to muligheder:

- Der findes et i, hvor γ_i er falsk. Da er $\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n$ også falskt, så $(\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n) \to \alpha$ er sandt.

- For alle i er γ_i sand. Da er $\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n$ også sandt, og α er sand per antagelsen, så $(\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n) \to \alpha$ er sandt.

Altså er $(\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n) \to \alpha$ en tautologi.

$\underline{\Leftarrow:}$ Antag, at $(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \to \alpha$ er en tautologi. Da er α sand, når γ_i er sand for alle i. Altså er $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \vDash \alpha$.

Vi vil nu vise, at resultatet også gælder for $n = 0$. Da er $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} = \emptyset$. Antag, at $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \vDash \alpha$. Dette er ensbetydende med $\emptyset \vDash \alpha$, hvilket er sandt, hvis og kun hvis α i sig selv en tautologi. ■

Eksempel 5.3. Lad p, q og r være logiske variable, og lad γ_1 være udsagnet $p \to q$, γ_2 være udsagnet $q \to r$ og α være udsagnet $p \to r$. Vi vil vise, at $\{\gamma_1, \gamma_2\} \vDash \alpha$. Vi starter med at lave en sandhedstabel.

p	q	r	γ_1	γ_2	α	$\gamma_1 \wedge \gamma_2 \to \alpha$
S	S	S	S	S	S	S
S	S	F	S	F	F	S
S	F	S	F	S	S	S
S	F	F	F	S	F	S
F	S	S	S	S	S	S
F	S	F	S	F	S	S
F	F	S	S	S	S	S
F	F	F	S	S	S	S

Fra sandhedstabellen kan vi se, at $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \to \alpha$ er en tautologi. Da har vi, at $\{\gamma_1, \gamma_2\} \vDash \alpha$, jævnfør Sætning 5.2. ∘

Vi startede med at sige, at vi ville formalisere deduktion, hvilket vi nu også er nået til. En deduktion er en liste af logiske udsagn, hvor hver ny linje enten er en tautologi eller følger fra de tidligere linjer ved hjælp af Modus Ponens, som vi nu vil definere og vise ikke er noget vrøvl.

Definition 5.4 (Modus Ponens)**.** Lad α og β være udsagn. Hvis α og $\alpha \to \beta$ begge er sande, da siger *Modus Ponens*, at β er sand. Dette skrives på følgende måde:

$$\begin{array}{l} \alpha \\ \underline{\alpha \to \beta} \\ \beta \end{array}$$

Bemærkning 5.5. Modus Ponens "giver mening" (og kan dermed anvendes i en deduktion), da $\{\alpha,\alpha \to \beta\} \vDash \beta$. Altså stemmer deduktioner og tautologiske konsekvenser fint overens.

I de følgende afsnit vil vi gerne vise, at nogle bestemte bevismetoder er gyldige. Med hvad vi nu ved om deduktion og Modus Ponens, kan vi konkludere, at en bevismetode er gyldig, hvis den kan skrives som en tautologisk konsekvens eller i sig selv er en tautologi.

Direkte bevis

Et direkte bevis er et bevis, hvor vi antager α og viser β ved hjælp af en række deduktioner. Med logiske symboler kan vi skrive dette som $\alpha \to \beta$.

Sætning 5.6. Lad $\gamma_1, \ldots ,\gamma_n,\alpha$ og β være udsagn. Hvis $\{\gamma_1, \ldots ,\gamma_n,\alpha\} \vDash \beta$, da vil $\{\gamma_1, \ldots ,\gamma_n\} \vDash \alpha \to \beta$.

Bevis. Lad $\gamma_1, \ldots ,\gamma_n,\alpha$ og β være udsagn. Antag, at $\{\gamma_1, \ldots ,\gamma_n,\alpha\} \vDash \beta$. Da er $(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \alpha) \to \beta$ er en tautologi, jævnfør Sætning 5.2. Ligeledes har vi, at $\{\gamma_1, \ldots ,\gamma_n\} \vDash \alpha \to \beta$ er ensbetydende med, at $(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \to (\alpha \to \beta)$ er en tautologi. Altså kan vi lave følgende deduktion ved hjælp af Modus Ponens.

$$\begin{array}{l} (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \alpha) \to \beta \\ \underline{((\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \alpha) \to \beta) \to ((\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \to (\alpha \to \beta))} \\ (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \to (\alpha \to \beta) \end{array}$$

Altså er $(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \to (\alpha \to \beta)$ sandt, hvilket er ensbetydende med, at $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \vDash \alpha \to \beta$, som var det, vi ønskede at vise. ∎

Kontraposition

En anden bevismetode er bevis ved kontraposition. Hvis vi gerne vil vise, at $\alpha \to \beta$, så er det tilstrækkeligt at vise, at $\neg\beta \to \neg\alpha$. Vi vil nu gennemgå et eksempel på et simpelt kontrapositionsbevis.

Proposition 5.7. Hvis x^2 er ulige, så er x ulige.

Bevis. Vi vil gerne bruge kontraposition. Det kontraponerede udsagn er: Hvis x er lige, så er x^2 lige.

Hvis x er lige, da findes $n \in \mathbb{Z}$, så $x = 2n$. Da vil $x^2 = (2n)^2 = 2(2n^2)$. Altså er x^2 også lige. Per kontraposition har vi nu vist, at hvis x^2 er ulige, så er x ulige. ∎

Bevismetoden kontraposition kan omskrives til udsagnet $((A \to B) \leftrightarrow ((\neg B) \to (\neg A)))$, som vi nu viser er en tautologi, så bevismetoden er gyldig.

Sætning 5.8 (Kontraposition)**.** $((A \to B) \leftrightarrow ((\neg B) \to (\neg A)))$ er en tautologi.

Bevis. Se Opgave 8.15. ∎

Modstrid

I har allerede tidligere set modstridsbeviser. Hvis man gerne vil bevise α ved hjælp af et modstridsbevis, så antager man $\neg\alpha$ og viser dernæst, at både β og $\neg\beta$ er sande, hvor β faktisk kan være et vilkårligt udsagn!

Sætning 5.9 (Modstrid)**.** $(\neg\alpha \to (\beta \wedge \neg\beta)) \to \alpha$ er en tautologi.

Bevis. Se Opgave 8.17. ■

Eksempel 5.10. I introduktionsforløbet så vi et modstridbevis i Eksempel 3.7. Vi vil nu vise, at dette bevis faktisk er gyldigt.

Lad udsagnet α være "$\sqrt{2}$ kan ikke skrives som en uforkortelig brøk". I beviset antager vi, at $\sqrt{2}$ kan skrives som en uforkortelig brøk $\frac{p}{q}$, altså at $\neg\alpha$ er sand. Derefter laves følgende deduktioner:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} = \frac{p}{q} &\implies 2 = \frac{p^2}{q^2} \\
&\implies 2q^2 = p^2 \\
&\implies p \text{ er lige} \\
&\implies p = 2 \cdot m \text{ for et } m \in \mathbb{Z} \\
&\implies 2 = \frac{(2 \cdot m)^2}{q^2} \\
&\implies q^2 = 2m^2 \\
&\implies q \text{ er lige} \\
&\implies q = 2 \cdot n \text{ for et } n \in \mathbb{Z} \\
&\implies \sqrt{2} = \frac{2m}{2n} \\
&\implies \frac{p}{q} \text{ er ikke en uforkotelig brøk.}
\end{aligned}$$

Vi har i denne deduktion vist, at $\neg\alpha \to \alpha$, men vi ved også, at det altid er tilfældet, at $\neg\alpha \to \neg\alpha$. Det vil altså sige at $\neg\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)$, hvilket per Sætning 5.9 medfører at α er sand, altså at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en uforkortelig brøk. ○

Eksempel 5.11. Vi vil nu bevise en anden sætning med et modstridsbevis. Vi minder os selv om, at et primtal $p \in \mathbb{N}$ er et tal større end 1, som kun kan deles med 1 og p.

Vi vil bevise at alle naturlige tal større end 1 kan skrives som et unikt produkt af primtal op til permutation. Denne sætning kaldes Aritmetikkens fundemantalsætning.

Bevis. Vi vil undlade at vise at alle tal kan skrives som et produkt af primtal, og nøjes med at vise unikhed.

Lad udsagnet α være "Alle tal kan skrives som et unikt produkt af primtal". Dermed vil $\neg\alpha$ være "Der findes ét tal, som kan skrives som to forskellige produkter af primtal".

Lad nu β være udsagnet "Der findes ét mindste tal $s \in \mathbb{N}$, som kan skrives som to forskellige produkter af primtal". Det er klart at $\neg\alpha$ medfører β, altså at

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m = s = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n.$$

Vi ved at for alle i,j at $p_i \neq q_j$, da s ellers ikke ville være det mindste tal med to forskellige primtalsfaktoriseringer. Vi ved nu at $p_1 < q_1$ eller $q_1 < p_1$. Lad os antage at $p_1 < q_1$ og lad $P = p_2 \cdot \dots \cdot p_m$ og $Q = q_2 \cdot \dots \cdot q_n$. Siden at $s = p_1 P = q_1 Q$ samt at $p_1 < q_1$ må $P > Q$. Derfor må $s - p_1 Q = (q_1 - p_1)Q = p_1(P - Q) < s$. Eftersom s er det mindste tal uden unik primtalsfaktorisering, må $(q_1 - p_1)Q$ have unik primtalsfaktorisering. Da p_1 er en faktor i $p_1(P - Q) = (q_1 - p_1)Q$ må p_1 være en faktor i enten $q_1 - p_1$ eller i Q. Vi ved at p_1 ikke deler q_1, og dermed kan p_1 ikke dele $q_1 - p_1$. Dermed må p dele Q. Men $Q = q_2 \cdots \cdot q_m$, og $p_1 \neq q_j$ for alle j. Dermed kan Q ikke unikt primtalsfaktoriseres, og eftersom $Q < s$ medfører dette $\neg B$.

Vi har dermed at $\neg\alpha \to (\beta \wedge \neg\beta)$, hvilket betyder at α er sand. $\circ$

6 Logisk induktion

Sætning 6.1 (Princippet om logisk induktion)**.** Lad $B = \{p_1, p_2, \ldots\}$ være mængden af logiske variable, $F = \{K_\neg, K_\wedge, K_\vee, K_\rightarrow, K_\leftrightarrow\}$ være mængden af konnektivfunktioner og $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ være mængden af udsagn. Lad $C \subseteq S$. Da siger *induktionsprincippet*, at hvis

- $B \subseteq C$, og
- C er lukket under funktionerne i F,

da er $C = S$.

Bevis. Vi har antaget, at $C \subseteq S$, så vi skal kun vise den anden inklusion. Lad $\alpha \in S$. Da indgår der et endeligt antal logiske variable, $p_1, \ldots, p_r$, i α. Ifølge Definition 3.4 er α da resultatet af et endeligt antal konnektivfunktioner, anvendt et endeligt antal gange med udgangspunkt i $p_1, \ldots, p_r$. Da $p_1, \ldots, p_r \in C$ og C er lukket under alle konnektivfunktioner, da må $\alpha \in C$. Altså er $C = S$. ■

Det normale induktionsprincip har både en induktionsstart og et induktionsskridt. I logisk induktion er vores induktionsstart at vise, at $B \subseteq C$, og vores induktionsskridt er at vise, at C er lukket under funktionerne i F.

Vi vil nu give et eksempel, hvor man bruger logisk induktion.

Eksempel 6.2. Lad

$$C = \{\alpha \in S \mid \alpha \text{ har lige mange "(" og ")"}\}.$$

Induktionsstart: Vi skal vise, at $B \subseteq C$. Da B udelukkende består af logiske variable p, som ikke har nogen parenteser, er der specielt lige mange højre- og venstreparenteser. Så $B \subseteq C$.

<u>Induktionsskridt:</u> Lad $\alpha,\beta \in C$. Lad H_α og V_α være antallet af henholdsvis højre- og venstreparenteser i α. Tilsvarende defineres H_β og V_β for β. Da $\alpha,\beta \in C$, så er $H_\alpha = V_\alpha$ og $H_\beta = V_\beta$.
Ved anvendelse af $K_\neg$ på α bliver antallet af højreparenteser i det nye udtryk $H_\alpha + 1$, og antallet af venstreparenteser bliver $V_\alpha + 1$. Da $H_\alpha + 1 = V_\alpha + 1$, så er C lukket under $K_\neg$.
Ved anvendelse af $K_\square$, hvor $\square$ er et binært konnektivsymbol, på α og β bliver antallet af højreparenteser i det nye udtryk $H_\alpha + H_\beta + 1$, og antallet af venstreparenteser bliver $V_\alpha + V_\beta + 1$. Da $H_\alpha + H_\beta + 1 = V_\alpha + V_\beta + 1$, så er C lukket under $K_\square$.
Altså er C lukket under funktionerne i F, hvilket viser induktionsskridtet.

Da har vi per princippet om logisk induktion, at $C = S$.

$\circ$

7 Matematikkens problemer

Som matematiker bør man spørge sig selv om, hvad matematik er for noget. Det er ikke et let spørgsmål at besvare, og matematikere har diskuteret dette spørgsmål siden det gamle Grækenland. Mængdelæren, som kom til i 1870'erne, har gjort os i stand til at konstruere matematikken stringent. Der opstår dog nogle seriøse problemer, når vi konstruerer matematikken - ligemeget om man bruger mængdelære eller noget andet til dette. Disse problemer er så fundamentale, at de altid vil opstå i vores matematik. I et logikforløb som dette er det derfor naturligt at adressere disse problemer. Først skal vi dog danne os en (overfladisk) ide om, hvordan matematikken er konstrueret.

Vi vil konstruere matematikken i tre trin:

1. Propositionel logik

2. Prædikatlogik

3. Aksiomer

Definition 7.1 (Propositionel logik)**.** *Propositionel logik* (også kaldet *0.-ordens logik*) er alt logik defineret i dette kapitel. Det vil sige området af matematik, der arbejder med logiske udsagn bygget op af logiske variable p, q, $r, \ldots$ og konnektiver $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$.

I det næste trin vil vi udvide propositionel logik, hvilket vi gør ved at definere prædikatlogik. Det er ikke vigtigt at kunne forstå prædikatlogik for at kunne forstå resten af afsnittet, men hvis man vil kunne forstå det, bør man lave projektet om konstruktionen af $\mathbb{Z}$.

Det vigtigste at tage med fra følgende definition er, at prædikatslogik er en form for udvidelse af den logik, som vi har arbejdet med indtil videre.

Definition 7.2. Prædikatlogik *Prædikatslogik* (også kaldet *1.-ordens logik*) udvider propositionel logik ved først og fremmest at bygge et sprog op, der erstatter de logiske variable. Dernæst tilføjer prædikatslogikken brugen af kvantorer $\forall$ og $\exists$, som I også stødte på i introduktionsforløbet.

Husk fra Afsnit 5, at man viser, at udsagnet q er sandt, ved at vise, at udsagnene p og $(p \to q)$ er sande. Vi kan nu spørge, hvordan vi ved, at p er sandt. Vi kan vise, at p er sandt, ved at vise, at udsagnene r og $(r \to p)$ er sande. Vi kan nu spørge, hvordan vi ved, at r er sandt, og sådan kan vi fortsætte for evigt.

I matematikken har vi derfor brug for nogle grundantagelser - nogle antagelser, der er så åbenlyse, at vi ikke kan bevise dem. Disse antagelser kalder vi for *aksiomer*, og der er kun ti aksiomer for mængdelæren og dermed for hele matematikken. Disse aksiomer er defineret ved brugen af prædikatlogik, hvilket er grunden til, at vi interesserer os for matematisk logik.

Definition 7.3 (Matematik)**.** Matematik er alt det, der kan bevises, når vi antager de ti aksiomer for mængdelæren.

Bemærkning 7.4. De første ni aksiomer kaldes Zermelo-Fraenkels aksiomssystem (forkortes ZF). De er opkaldt efter Ernst Zermelo og Abraham Fraenkel. Det tiende aksiom er udvalgsaksiomet (på engelsk "axiom of choice"), som er meget kontroversielt. Det er derfor først langt senere i historien, at vi accepterede udvalgsaksiomet og opdaterede vores aksiomssystem til Zermelo-Fraenkel-Choice aksiomssystemet (forkortes ZFC).

Eksempel 7.5. Vi har ikke mulighed for at definere alle ti aksiomer her, men vi kan godt definere de første to.

0. Eksistensaksiomet: $\exists A\ [A = A]$

   Dette betyder, at der eksisterer en mængde A således, at $A = A$. Da alle mængder er lig med sig selv, betyder aksiomet reelt, at der eksisterer mindst én mængde.

1. Udvidelsesaksiomet:

$$\forall A\ \forall B\ (\forall C\ (C \in A \leftrightarrow C \in B) \rightarrow [A = B])$$

   Aksiomet siger følgende: Givet to mængder A og B, så gælder det for alle mængder C, at $C \in A$, hvis og kun hvis $C \in B$, medfører, at $A = B$. Altså, at to mængder A og B er ens, hvis og kun hvis de har præcis de samme elementer.

○

I starten af det 20. århundrede stillede David Hilbert tre store spørgsmål om matematikken:

1. Er matematikken fuldstændig? (Med andre ord, har alle matematiske udsagn en sandhedsværdi?)
2. Er der nogle inkonsistenser i matematikken?
3. Kan alle sande udsagn bevises?

Kurt Gödel fandt svaret på det første spørgsmål. Han fandt ud af, at matematikken ikke er fuldstændig. Det vil sige, at der er matematiske spørgsmål, der hverken er sande eller falske. Gödel viste endda, at vi aldrig vil kunne lave et aksiomssystem, der kan beskrive aritmetikken, som samtidig er fuldstændigt. Vi har sidenhen fundet eksempler på dette.

Eksempel 7.6. Vi siger, at to mængder er lige store, hvis der findes en bijektiv funktion imellem dem. For eksempel er $\mathbb{N}$ og $2\mathbb{N}$ lige store. Vi har nemlig den bijektive funktion $f(n)\colon \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ givet ved $f(n) = 2n$. Andre eksempler på mængder af samme størrelse er $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$. Dog er der ikke bijektioner mellem alle mængder. Ligegyldigt hvor meget man prøver, kan man ikke finde en bijektiv funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Altså er $\mathbb{N}$ mindre end $\mathbb{R}$.

Nu kan vi stille følgende spørgsmål: Er der en mængde M, som er større end $\mathbb{N}$, men mindre end $\mathbb{R}$? Dette er kontinuumshypotesen, og vi ved med sikkerhed, at den ikke har nogen sandhedsværdi. ◦

Eksempel 7.7. Udvalgsaksiomet er et andet eksempel på et udsagn, som ikke har en sandhedsværdi i ZF. Dette betyder, at ZFC er inkonsistent, hvis og kun hvis ZF er inkonsistent. Det var opdagelsen af dette, som tillod udvalgsaksiomet at blive en af vores ti accepterede aksiomer. ◦

Det næste spørgsmål er, hvorvidt matematikken er konsistent. Altså, hvorvidt den er foruden modstrid. Det vil være virkelig skidt, hvis ZFC har en modstrid. For hvis der findes en modstrid, da vil alle matematiske udsagn være både sande og falske på samme tid.

Sætning 7.8. Lad φ være et vilkårligt matematisk udsagn. Hvis der findes en modstrid i matematikken, så er både φ og $\neg\varphi$ sande.

Bevis. Lad ψ være en modstrid i matematikken, altså lad både ψ og $\neg\psi$ være sande. Lad φ være et vilkårligt udsagn. Da ψ er sand, ved vi, at $\neg\varphi \to \psi$ er sandt. Vi kan nu kontraponere udsagnet og få $\neg\psi \to \varphi$. Men da $\neg\psi$ er sandt og $\neg\psi \to \varphi$ er sandt ved vi, at φ også er sand. Ligeledes kan vi bevise, at $\neg\varphi$ er sandt. ■

Vi har nu vist, hvorfor det vil være katastrofalt, hvis der er en modstrid i matematikken. Problemet er, at Gödel beviste, at vi aldrig vil kunne lave et aksiomssystem, der kan beskrive aritmetikken, og hvor vi samtidig kan sikre konsistens.

Det sidste spørgsmål er, hvorvidt der findes sande udsagn, som ikke kan bevises. Desværre beviste Alan Turing, at med et aksiomssystem, der er stærkt nok til at beskrive aritmetikken, eksisterer der sande udsagn, som ikke kan bevises. Vi har en masse berømte uløste problemer, som Goldbachs formodning, tvillingeprimtalformodningen og mange andre, der sandsynligvis er sande, men som måske aldrig kan bevises.

Til slut kan vi konkludere, at der er udsagn, som matematikken ikke kan sige noget om, sande udsagn, som aldrig kan bevises, og værst af alt er den matematik vi har arbejdet med de sidste 150 år måske fuldstændig ubrugelig.

Den eneste gode nyhed er, at både propositionel logik og prædikatlogik ikke kan konstruere aritmetikken og derfor ikke har samme problemer. Faktisk er disse logiske systemer både fuldstændige og konsistente, og alle sande udsagn kan bevises. Så matematisk logik er altså det eneste matematik med et sikkert grundlag.

8 Opgaver

• **Opgave 8.1:**
Afgør hvorvidt følgende er udsagn.

1) Matematik camp afholdes på månen.

2) Hvad hedder vores koordinatorer?

3) 3+11=14

4) 75+25

5) Der er 76440 tegn i denne matematikbog.

• **Opgave 8.2:**
Hvad vil $(p \vee q)$ betyde i Eksempel 2.4?

•• **Opgave 8.3:**
Omskriv følgende til logiske udsagn. Husk, at du kan gøre brug af variable.

1) Hjalte er ikke nattevagt.

2) Når jeg vander haven springer blomster ud.

3) Et naturligt tal n er lige hvis og kun hvis n har 2 som en divisor.

4) Tallet 4 er både et lige og et ulige tal.

5) Mindst en af følgende er sandt: Koordinatorne holder møde. Koordinatorene sover.

•• **Opgave 8.4:**
Omskriv følgende logiske udsagn til dagligdagssprog.

1) $(p \vee q)$, hvor p er "Jeg har læst lektier" og q er "Jeg har ikke læst lektier".

2) $(p \leftrightarrow q)$, hvor p er "Jeg får julegaver" og q er "Det er jul".

3) $(\neg p)$, hvor p er "Jeg er på fysikcamp".

4) $(q \wedge p)$, hvor p er "Jeg er på matematik camp" og q er "Jeg er glad".

Grammatik

• **Opgave 8.5:**
Hvilke af følgende udtryk er logiske udsagn? Begrund dit svar.

1) (pq)

2) $(q \to p)$

3) $(p \to q \to r)$

4) $)\neg q($

5) $q \wedge p($

6) $((p \wedge q) \vee q)$

•• **Opgave 8.6:**
Brug konnektivfunktioner $K_\square$ til at vise at følgende udtryk er logiske udsagn.

1) $((p \vee q) \to r)$

2) $(\neg(p \leftrightarrow q))$

3) $(p \to (q \to r))$

4) $(\neg(\neg(\neg(p \vee q))))$

• **Opgave 8.7:**
Find på nogle udsagn som p, q og r repræsenterer og oversæt de logiske udsagn fra den forrige opgave til dagligdagssprog.

•• **Opgave 8.8:**
Hvilke parenteser kan fjernes i Eksempel 3.6 uden at ændre betydningen af udsagnet? Anvend konventionen fra Bemærkning 3.7.

Sandhed

• **Opgave 8.9:**
Vis med en sandhedstabel, at $\alpha \leftrightarrow \beta$ er det samme som, at både $\alpha \to \beta$ og $\beta \to \alpha$ gælder. Altså, at $\alpha \leftrightarrow \beta$ har samme sandhedstabel som $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$.

•• **Opgave 8.10:**
Vis ved brug af sandhedsfunktioner, at $\neg\alpha \vee \beta$ og $\alpha \to \beta$ er logisk ækvivalente. [Hint: Sammenlign dine sandhedsværdier med sandhedstabellen i Eksempel 4.1.]

••• **Opgave 8.11:**
Konstruer resten af de logiske konnektivsymboler kun ved brug af $\neg$ og $\to$. [Hint: Skriv et udsagn α, som du tror er ækvivalent med $K_\square(p,q)$, og tjek dernæst, at $\alpha \equiv K_\square(p,q)$. Se Definition 4.6 for inspiration.]

••• **Opgave 8.12:**
Hvis vi kun må vælge to konnektivsymboler, hvilke kombinationer kan vi så nøjes med for stadig at kunne konstruere de resterende? Er der et konnektivsymbol, som vi ikke kan undvære?

• **Opgave 8.13:**
Bevis, at følgende faktisk er logiske ækvivalenser.
[Hint: Overvej i hvert tilfælde om sandhedsfunktioner eller sandhedstabeller er nemmest.]

1. Associative love:

$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r)).$$

$$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r)).$$

$$((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)).$$

2. Distributive love:

$$(p \wedge (q \vee r) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)).$$

$$(p \vee (q \wedge r) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r)).$$

3. Negationer:

$$\begin{aligned}(\neg(\neg p)) &\equiv p.\\ (\neg(p \rightarrow q)) &\equiv (p \wedge (\neg q)).\\ (\neg(p \leftrightarrow q)) &\equiv ((p \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge q)).\end{aligned}$$

4. De Morgans lov:

$$(\neg(p \wedge q)) \equiv ((\neg p) \vee (\neg q)).$$

$$(\neg(p \vee q)) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q)).$$

5. Andre:

    - Kontraposition:

    $$(p \rightarrow q) \equiv ((\neg q) \rightarrow (\neg p)).$$

    - Erstatning:

    $$((p \wedge q) \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow (q \rightarrow r)).$$

Beviser

●● **Opgave 8.14:**
Vis, at Bemærkning 5.5 er sandt.

● **Opgave 8.15:**
Bevis Sætning 5.8. [Hint: Lav en sandhedstabel.]

●● **Opgave 8.16:**
Brug kontraposition til at bevise følgende udsagn: "Jeg er et menneske, så jeg er ikke en fisk". [Hint: Prøv at bruge udsagnet "jeg har ikke lunger" i løbet af beviset. Snak eventuelt beviset igennem med hinanden.]

● **Opgave 8.17:**
Bevis Sætning 5.9. [Hint: Lav en sandhedstabel.]

Logisk induktion

●● **Opgave 8.18:**
Brug logisk induktion til at vise, at alle logiske udsagn har endeligt mange symboler.

●● **Opgave 8.19:**
Brug logisk induktion til at vise, at de eneste logiske udsagn uden parenteser er logiske variable, når vi ikke udelader nogen parenteser.

●● **Opgave 8.20:**
Brug logisk induktion til at vise, at der er dobbelt så mange parenteser som konnektiv symboler, når vi ikke udelader nogen parenteser.

●●● **Opgave 8.21:**
Bevis Proposition 4.9.

Indeks

Bibliografi

[1] Jesper Lützen. *Diskrete Matematiske Metoder*. 2. udg. Københavns Universitet, 2019.

[2] Wikimedia. *Image-Koenigsberg - Wikimedia*. 2016. URL: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Image-Koenigsberg,_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg` (hentet 28.12.2019).

[3] Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory*. 2. udg. Prentice Hall, Inc., 2001. ISBN: 0-13-014400-2.

[4] J. J. O'Connor og E. F. Robertson. *Dénes König (1884 - 1944) - Biography - MacTutor History of Mathematics*. 2014. URL: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Konig_Denes/`.

[5] Allan Baktoft. *Matematik i virkeligheden Bind 2*. 3. udg. Forlaget Natskyggen, 2017. ISBN: 978-87-92857-15-6.

[6] IEEE computer society. *Computer Pioneers - Edsger W. Djikstra*. 2019. URL: `https://history.computer.org/pioneers/dijkstra.html` (hentet 02.11.2019).

[7] Nathalie Wahl og Lars Hesselholt. *Lineær Algebra*. 2016.

[8] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right*. 3. udg. Springer. ISBN: 978-3-319-11079-0.